Dal domino alle somme finite

Luca Sbano (Liceo *Vittoria Colonna*)

luca.sbano@posta.istruzione.it

Liceo Matematico 2022/23

Indice

Introduzione: gli obiettivi

- Attraverso esempi concreti si introducono gli studenti all'uso delle sommatorie. L'esempio scelto è la costruzione di una scala con le tessere del domino di cui si cerca di massimizzare la estensione orizzontale. Questo problema conduce allo studio delle somme armoniche.
- Relazioni/successioni date per ricorrenza come strumenti per rappresentare sommatorie utili anche per il calcolo numerico.
- Il Principio d'Induzione come strumento naturale per studiare le somme finite e relazioni di ricorrenza.
- Lo studio euristico delle sommatorie quando l'estremo superiore cresce.

Introduzione: indicazioni operative

- Lezioni dialogate in cui hanno avuto spazio le discussione dei problemi proposti.
- Le domande scritte in rosso in questa presentazione sono state utilizzate in classe per definire le indicazioni per le schede di lavoro.
- Le schede di lavoro proposte sono state caricate come file condivisi sul cloud della scuola.
- La classe del LM era formata da 12 studenti, impegnati per 1 ora a settimana da gennaio.

Giochiamo con le pedine del domino

Problema: Utilizzando le tessere del domino proviamo a costruire una scala come in Figura 1 che sporga il più possibile verso destra.

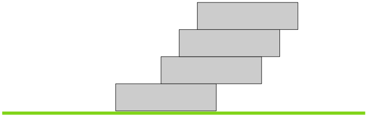

Figura 1: Ponte con il domino

Giocahiamo con le tessere del domino

Alla Classe sono state poste le seguenti domande in forma di scheda editabile sul drive di scuola in modo che potessero lavorarci:

- Quante tessere riesci ad utilizzare?
- Quanta è lunga la scala?
- Quale metodo utilizzi per costruire la scala? Danne una descrizione dettagliata descrivendo anche i tentativi non andati a buon fine. E spiega perché non ha funzionato.
- È possibile trovare con una formula la lunghezza orizzontale della scala sapendo il numero di tessere usate?

Ogni studente ha potuto raccontare i suoi esperimenti, le sue osservazioni e le sue elaborazioni su un file personale sul Drive della Scuola.

La fisica può aiutare

- Come posso impilare due tessere del domino in modo da ottenere la massima estensione come in figura 1?
- È un problema di baricentro, ricordiamo che il baricentro di un corpo è il punto dove è applicata la forza di gravità. Per corpi a forma di parallelepipedo il baricentro si trova nel punto di intersezione delle diagonali. Se si hanno per esempio 2 corpi con baricenti rispettivamente in $\vec{x}_1$ e $\vec{x}_2$ e masse m_1 e m_2 baricentro del sistema sarà:

$$\vec{x}_{CM} = \frac{m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2}{m_1 + m_2}$$

- Basta che la pedina posta sopra la prima abbia il suo baricentro alla fine della prima.

La fisica può aiutare

- Come posso impilare due tessere del domino in modo da ottenere la massima estensione come in figura 1?
- È un problema di baricentro, ricordiamo che il baricentro di un corpo è il punto dove è applicata la forza di gravità. Per corpi a forma di parallelepipedo il baricentro si trova nel punto di intersezione delle diagonali. Se si hanno per esempio 2 corpi con baricenti rispettivamente in $\vec{x}_1$ e $\vec{x}_2$ e masse m_1 e m_2 baricentro del sistema sarà:

$$\vec{x}_{CM} = \frac{m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2}{m_1 + m_2}$$

- Basta che la pedina posta sopra la prima abbia il suo baricentro alla fine della prima.

La fisica può aiutare

- Come posso impilare due tessere del domino in modo da ottenere la massima estensione come in figura 1?
- È un problema di baricentro, ricordiamo che il baricentro di un corpo è il punto dove è applicata la forza di gravità. Per corpi a forma di parallelepipedo il baricentro si trova nel punto di intersezione delle diagonali. Se si hanno per esempio 2 corpi con baricenti rispettivamente in $\vec{x}_1$ e $\vec{x}_2$ e masse m_1 e m_2 baricentro del sistema sarà:

$$\vec{x}_{CM} = \frac{m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2}{m_1 + m_2}$$

- Basta che la pedina posta sopra la prima abbia il suo baricentro alla fine della prima.

La fisica può aiutare

- Come posso impilare due tessere del domino in modo da ottenere la massima estensione come in figura 1?
- È un problema di baricentro, ricordiamo che il baricentro di un corpo è il punto dove è applicata la forza di gravità. Per corpi a forma di parallelepipedo il baricentro si trova nel punto di intersezione delle diagonali. Se si hanno per esempio 2 corpi con baricenti rispettivamente in $\vec{x}_1$ e $\vec{x}_2$ e masse m_1 e m_2 baricentro del sistema sarà:

$$\vec{x}_{CM} = \frac{m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2}{m_1 + m_2}$$

- Basta che la pedina posta sopra la prima abbia il suo baricentro alla fine della prima.

La fisica può aiutare

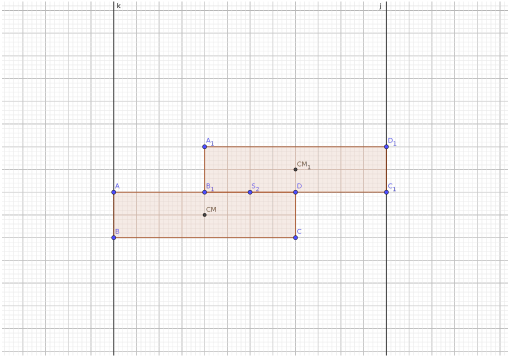

Figura 2: CM_i indicano i baricentri

Come mettere la terza pedina?

La fisica può aiutare

- Posto che la lunghezza delle pedina sia 1, il baricentro di due pedine misurato dai due lati delimitati dalle rette h e j (due pedine sono poste in modo simmetrico) è:

$$d(S_2) = \frac{1 + 1/2}{2} = \frac{3}{4}$$

  corrispondente alla distanza sia da h che da j del punto S_2 (sistema formato da due pezzi) in Figura 2.
- La terza pedina dovrà essere posizionata in modo che si sfrutti il baricentro delle prime due.
- Dove potrà essere disposta la terza pedina?

La fisica può aiutare

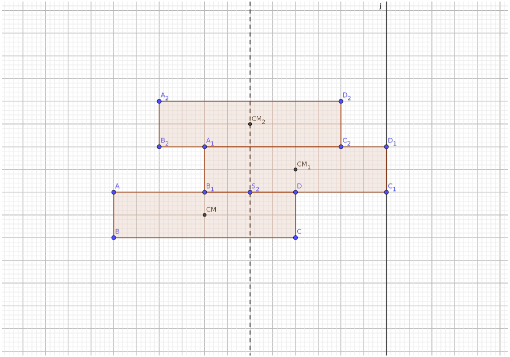

Figura 3:

La scelta naturale sarebbe verso l'alto. Ma in questo modo non si riesce ad estendere la scala verso destra.

La fisica può aiutare

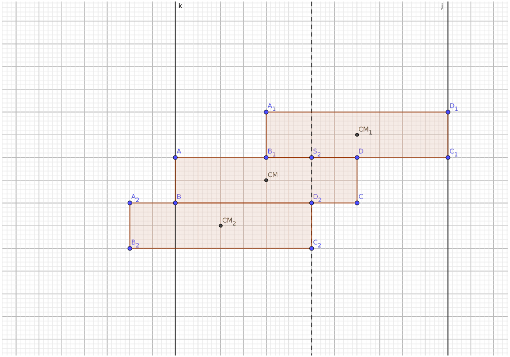

Figura 4:

Occorre pensare in modo diverso: per estendere la scala i mattoni possono essere aggiunti dal basso facendo coincidere i baricentri del terzo con quello del sistema formato dai primi due

La fisica può aiutare

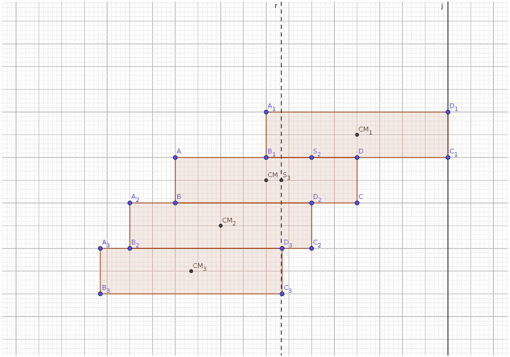

Figura 5:

Adesso allo stesso modo potremo inserire il quarto facendo coincidere il suo baricentro con quello del sistema formato dai primi tre.

Calcolo dei centri di massa

- Fissiamo l'origine a destra nella retta j e calcoliamo i centri di massa ricordando che ogni volta che aggiungiamo un pezzo del domino modifichiamo il centro di massa del sistema precedente:
- Un pezzo: $d(S_1) = CM_1 = \frac{1}{2}$
- Due pezzi: $d(S_2) = \frac{1 + 1/2}{2} = \frac{1/2 + (1/2 + d(S_1))}{2} = \frac{3}{4}$
- Tre pezzi:
  $d(S_3) = \frac{1/2 + (1/2 + d(S_1)) + (1/2 + d(S_2))}{3} = \frac{11}{12}$.
  Notiamo che il terzo pezzo modifica il centro di massa del sistema formato da due pedine.

Generalizzazione e nuovi simboli

- Come possiamo generalizzare il calcolo del centro di massa? Questa domanda è stata posta alla classe, e ciascuno studente - anche in gruppo - è stato invitato a scrivere le sue osservazioni e tentativi di soluzione sul suo documento sul Drive.
- Ecco la formula

$$d(S_n) = \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + d(S_1)\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2} + d(S_{n-1})\right)\right\}. \tag{2.1}$$

Generalizzazione e nuovi simboli

- Come possiamo generalizzare il calcolo del centro di massa? Questa domanda è stata posta alla classe, e ciascuno studente - anche in gruppo - è stato invitato a scrivere le sue osservazioni e tentativi di soluzione sul suo documento sul Drive.
- Ecco la formula

$$d(S_n) = \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + d(S_1)\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2} + d(S_{n-1})\right)\right\}. \tag{2.1}$$

Generalizzazione e nuovi simboli

- Partendo dai tentativi degli studenti e poi dalla formula

$$d(S_n) = \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + d(S_1)\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2} + d(S_{n-1})\right)\right\}, \tag{2.2}$$

  c'è la necessità di una simbologia per rappresentare le operazioni necesssarie al calcolo.

- In matematica quando si hanno somme ripetute si utilizza il simbolo di *sommatoria* Σ.
  Ad esempio, la somma $1 + 2 + \ldots + 99 + 100$ si scrive in modo piu più compatto come $\sum_{n=1}^{N} n$ ma anche $\sum_{k=1}^{N} k$, ossia *cambiando l'indice di sommatoria la somma non cambia*.
- Come si può usare il simbolo Σ per scrivere la formula (2.2)?.

Generalizzazione e nuovi simboli

- Partendo dai tentativi degli studenti e poi dalla formula

$$d(S_n) = \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + d(S_1)\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2} + d(S_{n-1})\right)\right\}, \tag{2.2}$$

  c'è la necessità di una simbologia per rappresentare le operazioni necesssarie al calcolo.

- In matematica quando si hanno somme ripetute si utilizza il simbolo di *sommatoria* Σ.
  Ad esempio, la somma $1 + 2 + \ldots + 99 + 100$ si scrive in modo piu più compatto come $\sum_{n=1}^{N} n$ ma anche $\sum_{k=1}^{N} k$, ossia *cambiando l'indice di sommatoria la somma non cambia*.

- Come si può usare il simbolo Σ per scrivere la formula (2.2)?.

Generalizzazione e nuovi simboli

- Partendo dai tentativi degli studenti e poi dalla formula

$$d(S_n) = \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + d(S_1)\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2} + d(S_{n-1})\right)\right\}, \tag{2.2}$$

  c'è la necessità di una simbologia per rappresentare le operazioni necesssarie al calcolo.

- In matematica quando si hanno somme ripetute si utilizza il simbolo di *sommatoria* Σ.
  Ad esempio, la somma $1 + 2 + \ldots + 99 + 100$ si scrive in modo piu più compatto come $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n$ ma anche $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} k$, ossia *cambiando l'indice di sommatoria la somma non cambia*.

- Come si può usare il simbolo Σ per scrivere la formula (2.2)?.

La lunghezza che sporge della scala

- Come possiamo calcolare la lunghezza sporgente della scala?
- Utilizziamo le figure ed osserviamo:

  Il primo pezzo da un contributo uguale a $\frac{1}{2}$

  Il secondo pezzo da un contributo uguale a $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

  Il terzo pezzo da un contributo uguale a $\frac{11}{12} - \frac{3}{4} = \frac{1}{6}$

  Come continua la successione delle distanze?

La lunghezza che sporge della scala

- Come possiamo calcolare la lunghezza sporgente della scala?
- Utilizziamo le figure ed osserviamo:

Il primo pezzo da un contributo uguale a $\frac{1}{2}$

Il secondo pezzo da un contributo uguale a $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Il terzo pezzo da un contributo uguale a $\frac{11}{12} - \frac{3}{4} = \frac{1}{6}$

Come continua la successione delle distanze?

La lunghezza che sporge della scala

- Ad ogni passo della costruzione noi aggiungiamo un pezzo del domino alla scala
- Se indichiamo con x_n il contributo alla sporgenza dato da un pezzo del domino aggiunto al passo n abbiamo:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{2}\\
x_2 &= d(S_2) - d(S_1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\\
x_3 &= d(S_3) - d(S_2) = \frac{11}{12} - \frac{3}{4} = \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

- Come continua la successione delle sporgenze?
- Quanto sporge complessivamente la scala?
- Prova ad utilizzare il simbolo $\sum$ per scrivere la formula generale

Soluzioni

La lunghezza che sporge della scala

- Ad ogni passo della costruzione noi aggiungiamo un pezzo del domino alla scala
- Se indichiamo con x_n il contributo alla sporgenza dato da un pezzo del domino aggiunto al passo n abbiamo:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} \\ x_2 &= d(S_2) - d(S_1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\ x_3 &= d(S_3) - d(S_2) = \frac{11}{12} - \frac{3}{4} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

- Come continua la successione delle sporgenze?
- Quanto sporge complessivamente la scala?
- Prova ad utilizzare il simbolo Σ per scrivere la formula generale

Soluzioni

La lunghezza che sporge della scala

- Ad ogni passo della costruzione noi aggiungiamo un pezzo del domino alla scala
- Se indichiamo con x_n il contributo alla sporgenza dato da un pezzo del domino aggiunto al passo n abbiamo:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{2} \\
x_2 &= d(S_2) - d(S_1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\
x_3 &= d(S_3) - d(S_2) = \frac{11}{12} - \frac{3}{4} = \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

- Come continua la successione delle sporgenze?
- Quanto sporge complessivamente la scala?
- Prova ad utilizzare il simbolo Σ per scrivere la formula generale

Soluzioni

La lunghezza che sporge della scala

- Ad ogni passo della costruzione noi aggiungiamo un pezzo del domino alla scala
- Se indichiamo con x_n il contributo alla sporgenza dato da un pezzo del domino aggiunto al passo n abbiamo:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{2} \\
x_2 &= d(S_2) - d(S_1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\
x_3 &= d(S_3) - d(S_2) = \frac{11}{12} - \frac{3}{4} = \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

- Come continua la successione delle sporgenze?
- Quanto sporge complessivamente la scala?
- Prova ad utilizzare il simbolo Σ per scrivere la formula generale

Soluzioni

La lunghezza che sporge della scala

- Ad ogni passo della costruzione noi aggiungiamo un pezzo del domino alla scala
- Se indichiamo con x_n il contributo alla sporgenza dato da un pezzo del domino aggiunto al passo n abbiamo:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{2} \\
x_2 &= d(S_2) - d(S_1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\
x_3 &= d(S_3) - d(S_2) = \frac{11}{12} - \frac{3}{4} = \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

- Come continua la successione delle sporgenze?
- Quanto sporge complessivamente la scala?
- Prova ad utilizzare il simbolo Σ per scrivere la formula generale

Soluzioni

Le risposte degli studenti

- Alcuni studenti hanno presentato un interessante costruzione grafica che purtroppo non ha sviluppato ulteriormente.
- Molti hanno intuito i termini successivi a x_3.
- Un paio di studenti hanno sviluppato la propria formula con procedimento corretto ma che conteneva inesattezze. Uno studente è riuscito a correggere la propria dimostrazione.

Sommiamo!...o almeno proviamoci

- La sporgenza totale delle scale formate da N pezzi del domino è uguale a:

$$x_{tot}(N) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$$

  Quanto vale questa somma? Proviamo a calcolarla per vari valori di N, ad esempio $N = 10; 100; 1000$.

- Costruite il grafico di per $x_{tot}(N)$ per qualche valore di N.

Proviamo a dimostrare le formule con Σ

Le formule che coinvolgono un indice intero possono spesso essere dimostrate attraverso il metodo di induzione:

Principio di induzione

Chiamiamo $P(n)$ una proposizione (o formula) dipendente da $n \in \mathbb{N}$.
Se le seguenti due condizioni sono soddisfatte

- $P(1)$ è verificata, e
- assumendo $P(n)$ sia soddisfatta, si dimostra $P(n+1)$;

allora $P(n)$ è soddisfatta per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Un momento di difficoltà della Classe: capire li Principio d'induzione

- In un momento di difficoltà nella comprensione del Principio d'induzione, la discussione con gli studenti ha suggerito di proporgli di costruire una storia (video, fumetto o altro) per cercare di spiegare il principio e far venire alla luce più chiaramente i dubbi e le incertezze.
- Gli studenti hanno risposto in vario modo:

Un momento di difficoltà della Classe: capire li Principio d'induzione

- In un momento di difficoltà nella comprensione del Principio d'induzione, la discussione con gli studenti ha suggerito di proporgli di costruire una storia (video, fumetto o altro) per cercare di spiegare il principio e far venire alla luce più chiaramente i dubbi e le incertezze.
- Gli studenti hanno risposto in vario modo:

La storia di F.L.: sberle

In una classe di liceo matematico c'è Pierino, ragazzo di 15 anni, mingherlino con un taglio di capelli freschissimo da far invidiare. Il professore della classe lo nominò alla lavagna per confermare se in una scala di mattoni è possibile teorizzare il numero possibile di blocchi su uno base. Lui cominciò a tracciare una piramide su crociate di diagonali alla bandiera Giamaica. "Pierino ma tu stavi seguendo la lezione?" Chiese il professore; "Si" gli rispose Pierino mentre il suo naso si allungò. Pierino fu pregato di sedersi al suo posto. Mentre si avvicinò al suo posto, un entità di nome Lucignolo si era messo lì. "Spostati quello è il mio posto" gli disse con tono patriottico. Dopo il suo rifiuto per l'evidente inclinazione dello zaino tangente nell'altro banco, Lucignolo fu scaraventato con una sberla per terra. "Un esempio di Principio di induzione è quello delle sberle che permettono a Lucignolo di spostarsi dal posto. In questo caso, un numero qualsiasi di sberle maggiore o uguale di una sola unitÃ riesce a scaraventare Lucignolo fuori dalla sedia di Pierino", disse l'insegnante. Così, dopo l'analisi di ripetuti tentativi di questo Principio, Lucignolo tornò a casa senza denti del giudizio.

La poesia di T.C.

Indovina indovinello,
quale sarà stavolta il tranello?
Se la risposta vuoi trovare
un famoso Principio dovrai studiare
non aiutarti con l'ipertesto,
comunque sia, l'indovinello è questo:
C'è un bel gruppo di bambine
che giocan tutte le mattine
si divertono con una palla
metà azzurra e metà gialla
un giorno la sfera vola via
e va a riprenderla Annamaria
Ma sulla strada del ritorno
lei comincia a guardarsi intorno
trova dei sassi e chiama le amiche
e non certo delle scansafatiche
si mettono in cerchio e ad ognuna
ne è assegnato uno, senza distinzione alcuna.
Si accorgono, però, di un particolare strano
(questo passaggio va capito piano)
ognuna ha il proprio sasso ma ne resta ancora uno
decidono di chiamare il loro amico Bruno
così glielo danno ma ne appare uno nuovo
forse nascosto tra qualche rovo
vanno avanti finché
non capiscon che ahimè
i sassi non finiscono e per ogni altro arrivo
ce ne sarà sempre uno successivo.
siamo arrivati alla conclusione

ed il Principio è quello di...

La storia di E.B.: Un matematico e le sue fissazioni

C'era una volta un giovane matematico di nome Luca, che amava risolvere i problemi più complessi del mondo della matematica. Un giorno, mentre stava studiando il principio di induzione, ebbe un'idea folle: avrebbe provato a dimostrare che il principio di induzione non funzionava.

Così, Luca si sedette alla sua scrivania e iniziò a lavorare sulla dimostrazione. Passarono le ore, i giorni e le settimane, ma Luca non riuscì a trovare alcun errore nella dimostrazione del principio di induzione. Ad ogni tentativo di dimostrare che il principio non funzionava, Luca si imbatté in una contraddizione. Dopo molte settimane di lavoro intenso, Luca iniziò a sentirsi sempre più frustrato. Alla fine, si arrese e decise di accettare che il principio di induzione fosse effettivamente valido. Ma non poteva lasciare andare la sua ossessione per dimostrare il contrario.

Così, Luca decise di trovare un modo creativo per dimostrare il principio di induzione in modo diverso da qualsiasi altra dimostrazione mai fatta prima. Decise di creare una visualizzazione del principio, rappresentandolo come una serie di blocchi di costruzione, uno sopra l'altro. Ogni blocco rappresentava un numero naturale, e la dimostrazione consisteva nel dimostrare che se un blocco era stabile, allora il blocco successivo sarebbe stato stabile anche esso. Luca trascorse mesi a costruire i blocchi e a dimostrare la loro stabilità, uno per uno. Alla fine, quando la torre di blocchi raggiunse un'altezza impressionante, Luca si ferm ò e ammirò il suo lavoro. Aveva dimostrato che il principio di induzione era valido in modo creativo e originale.
Da quel giorno in poi, Luca divenne famoso nella comunità matematica per la sua visualizzazione innovativa del principio di induzione. E ogni volta che guardava la sua torre di blocchi, si ricordava della lezione che aveva imparato: che a volte, per dimostrare una verità, è necessario pensare fuori dagli schemi e trovare modi creativi per rappresentarla.

La storia di C.P.: La somma dei primi N naturali

C'erano una volta due uccellini di nome cip e ciap che volevano costruire il loro nido impilando dei rametti. Iniziarono partendo da rametto piccoli che valevano 1 poi però volevano aggiungere sempre un rametto che era più grandi di uno fino ad arrivare ad avere 75 unità visto che tra gli uccellini si credeva fosse il numero perfetto. Così volarono a cercare dei rametti e appena li tornavano, tornavano a contare il numero a cui erano arrivati perdendo un sacco di tempo a contare a quanto erano arrivati visto che perdevano sempre il conto. Dopo un po' di tempo che facevano avanti indietro pensarono a un modo più veloce per contare. Così cip e ciap dopo aver perso lo stesso tempo a trovare la formula pensarono al fatto che la somma delle unità era uguale l'unità del rametto più grande per se stessa più uno diviso due. Così riuscirono a costruire il loro nido prima che fece buio grazie al Principio di induzione.

La somma di N interi consecutivi: metodo di Gauss

Ora dimostriamo $\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}$.

- Consideriamo la sequenza degli interi $0, 1, 2, 3, \ldots, N$ e scriviamola secondo i due ordinamenti:

$$0, 1, 2, \ldots, N-2, N-1, N$$
$$N, N-1, N-2, \ldots, 2, 1, 0$$

- Notiamo che ci sono $N+1$ coppie la cui somma è uguale ad N, ma $N(N+1)$ è uguale a due volte la somma cercata. Quindi

$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}$$

La somma di N interi consecutivi: metodo induttivo

Con il metodo di Gauss abbiamo costruito la somma:

$$S(N) = \sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}.$$

Dimostriamola per induzione:

- Primo passo: per $N = 1$ si verifica subito che $S(1) = 1$.
- Assumiamo che $S(N)$ sia corretta, proviamo $S(N+1)$.

$$S(N+1) = \sum_{n=1}^{N+1} n = S(N) + N + 1$$

che per l'ipotesi induttiva si scrive come:

$$S(N+1) = \frac{N(N+1)}{2} + N + 1 = \frac{(N+1)(N+2)}{2},$$

che corrisponde alla formula per $S(N+1)$.

Equazioni ricorsive e metodo dell'*Ansatz*

- Dalla precedente dimostrazione possiamo osservare che tra la somma $S(N)$ ed $S(N+1)$ esiste la relazione:

$$S(N+1) = S(N) + N + 1, \tag{4.1}$$

- si tratta di una relazione *ricorsiva* poiché lega il valore di $S(N+1)$ al suo valore al passo precedente $S(N)$. Notiamo che sapendo $S(1) = 1$ tutti i termini possono essere calcolati, ad esempio $S(2) = 3$, $S(4) = 10$.
- Per trovare la formula generale occorre risolvere l'equazione (4.1). Per cercarla si procede attraverso un *Ansatz*, termine proveniente dal tedesco, ed indicante un tentativo di soluzione che corrisponde ad alcuni criteri di plausibilità.

Equazioni ricorsive e metodo dell'*Ansatz*

Risolviamo $S(N+1) = S(N) + N + 1$ con un *Ansatz*:

- Osserviamo $S(0) = 0$.
- Potremmo cercare la soluzione utilizzando una funzione semplice di N: per esempio un polinomio della forma:

$$S(N) = \alpha\, N,$$

  ossiamo, possiamo trovare $\alpha \in \mathbb{Z}$ idipendente da N tale che l'equazione ricorsiva sia risolta?
- Sostituendo $S(N) = \alpha\, N$ nell'equazione otteniamo:

$$\alpha\,(N+1) = \alpha\, N + N + 1.$$

  Si vede facilmente che non esiste nessun α che risolva il problema.

Equazioni ricorsive e metodo dell'*Ansatz*

- Possiamo tentare con un polinomio di grado superiore: $S(N) = \alpha\, N^2 + \beta\, N$.
- Sostiuiamo nell'equazione ricorsiva ed otteniamo: $\alpha\,(N+1)^2 + \beta\,(N+1) = \alpha\, N^2 + \beta\, N + N + 1$.
- Sviluppando le potenze e semplificando i termini simili si ottiene l'equazione $2\alpha\, N + \alpha + \beta = N + 1$.
- La precedente equazione sarà verificata per ogni N solo se: $2\,\alpha = 1$ e $\alpha + \beta = 1$ ovvero per $\alpha = 1/2$ e $\beta = 1/2$.
- Quindi la soluzione è:

$$S(N) = \frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{2}N = \frac{N(N+1)}{2}$$

che corrisponde alla formula trovata precedentemente.

La somma dei quadrati N interi consecutivi

Ecco un utile esercizio:

- Poniamo $S_2(N+1) = \sum_{n=1}^{N} n^2$.
- Dimostra che $S_2(N+1) = S_2(N) + (N+1)^2$.
- Usa il metodo dell'*Ansatz* e dimostra che

$$S_2(N) = \frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6}.$$

Soluzioni 1

La formula per i baricentri

Dimostriamo la formula $d(S_n) = \dfrac{1}{n}\left\{\dfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{1}{2} + d(S_k)\right)\right\}$.

- Si è visto che $d(S_1) = 1/2$,
- Assumiamo la formula per $d(S_k)$ per $0 \leq k \leq n$. Una pedina di indice k ha la posizione $d(S_k) + 1/2$
- Allora per $d(S_{n+1})$ calcoliamo la somma delle posizioni delle pedine da 0 a $n-1$ e vi sommiamo la posizione del corpo di indice n:

$$d(S_{n+1}) = \frac{1}{n+1}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2} + d(S_k)\right) + \left(\frac{1}{2} + d(S_n)\right)\right\}.$$

Otteniamo così la formula per la pedina numero $n+1$:

$$d(S_{n+1}) = \frac{1}{n+1}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2} + d(S_k)\right)\right\}.$$

Attività suggerite dagli incontri con gli studenti

- Dopo l'attività sulla storia da scrivere siamo tornati a studiare la somma
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n},$$
che come abbiamo visto è uguale al doppio della lunghezza della $x_{tot}(N)$ della scala.
Gli studenti tendono a pensare che all'aumentare di N la somma armonica non cresca, ed stato suggerito loro di cominciare con un confronto numerico tra
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \text{ e } \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$$
per vari valori di N per esempio usando un foglio di calcolo.

Attività suggerite dagli incontri con gli studenti

- In Classe si è osservato che:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{N}$$

la si può confrontare con una sua somma parziale che cresce al crescere di N fino a superare qualunque limite prefissato.

- Invece per studiare la somma $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$ si è suggerito di studiare

la differenza

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n-1} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

dopo aver osservato che per ogni naturale $n > 1$ vale

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)} > \frac{1}{n^2}$$

Soluzioni 2

Achille e la tartaruga

Il seguente paradosso è dovuto al filosofo greco Zenone di Elea V sec A.C. Eccone la descrizione dello scrittore argentino J. L. Borges (1889 - 1986):

Achille, simbolo di rapidità, deve raggiungere la tartaruga, simbolo di lentezza. Achille corre dieci volte più svelto della tartaruga e le concede dieci metri di vantaggio. Achille corre quei dieci metri e la tartaruga percorre un metro; Achille percorre quel metro, la tartaruga percorre un decimetro; Achille percorre quel decimetro, la tartaruga percorre un centimetro; Achille percorre quel centimetro, la tartaruga percorre un millimetro; Achille percorre quel millimetro, la tartaruga percorre un decimo di millimetro, e così via all'infinito; di modo che Achille può correre per sempre senza raggiungerla.

Possiamo utilizzare gli strumenti matematici per confutare questo paradosso?

Achille e la tartaruga

- Proviamo a ragionare senza utilizzare la comune conoscenza del moto secondo la fisica di Galilei e Newton, ma considerando solo l'informazione sulla rapidità relativa, implicita nella descrizione del paradosso. Ovvero se chiamiamo v_A la velocità di Achille e v_T quella della tartaruga, assumiamo che

$$\frac{v_T}{v_A} = r \text{ con } r < 1.$$

- Consideriamo un tracciato rettilineo di lunghezza unitaria dove indicheremo con x le posizioni. Achille *piè veloce* parte dall'origine $x_{A0} = 0$, mentre la tartaruga parte dalla metà $x_{T0} = 1/2$.

Achille e la tartaruga

- Quanto tempo impiega Achille a raggiungere la posizione della tartaruga?
  Per percorrere 1/2 Achille impiega
  $$t_{A1} = \frac{1}{2v_A}$$
  Nello stesso tempo la tartaruga si sposterà da x_{T0} e raggiungerà
  $$x_{T1} = x_{T0} + v_T\, t_{A1} = \frac{1}{2} + \frac{v_T}{2v_A} = x_{T0} + \frac{r}{2}$$

Achille e la tartaruga

- Nel secondo passaggio, Achille deve raggiungere la posizione della tartaruga e lo farà in un tempo:

$$t_{A2} = \frac{x_{T1} - x_{T0}}{v_A} = \frac{r}{2v_A}.$$

Nello stesso tempo la tartaruga avrà percorso un tratto uguale a

$$\frac{r}{2v_A}\, v_T = \frac{r^2}{2}$$

e quindi si troverà in

$$x_{T2} = x_{T0} + \frac{r}{2} + \frac{r^2}{2}$$

Achille e la tartaruga

- Procedendo in questo modo si trova che al terzo passaggio la tartaruga si troverà nella posizione:

$$x_{T3} = x_{T0} + \frac{r}{2} + \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{2}$$

- È un utile esercizio sull'induzione dimostrare che dopo N passi la tartaruga sarà in

$$x_{TN} = x_{T0} + \frac{r}{2} + \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{2} + \ldots + \frac{r^N}{2}$$

Achille e la tartaruga

- Riscriviamo x_{TN} come $x_{TN} = x_{T0} + \frac{r}{2} f(r)$ dove
$$f(r) = \sum_{n=0}^{N-1} r^n.$$
- x_{TN} può essere scritto:
$$x_{TN} = x_{T0} + \frac{v_T}{2v_A} f(r) = \frac{1}{2} + \frac{v_T}{2v_A} f(r)$$
- Il tempo t_{TN} nel quale la tartaruga è arrivata in x_{TN} è:
$$t_{TN} = \frac{1}{2v_A} f(r)$$
- Achille si troverà in
$$x_{AN} = v_A\, t_{TN} = \frac{1}{2} f(r)$$

Achille e la tartaruga

- A questo punto vogliamo capire come dipende la distanza relativa fra Achille e la tartaruga dopo N passi:

$$|x_{TN} - x_{AN}| = \left|\frac{1}{2} + \frac{r}{2}\, f(r) - \frac{1}{2} f(r)\right| = \frac{1}{2}\, |1 + r\, f(r) - f(r)|$$

- Usando la definizione di $f(r)$:

$$|x_{TN} - x_{AN}| = \frac{1}{2} \left|1 + r \sum_{n=0}^{N-1} r^n - \sum_{n=0}^{N-1} r^n\right|$$

- Un utile esercizio sull'uso della sommatoria e far vedere che:

$$|x_{TN} - x_{AN}| = \frac{1}{2} \left|\sum_{k=1}^{N} r^k - \sum_{n=1}^{N-1} r^n\right| = \frac{r^N}{2}$$

Achille e la tartaruga

- Il fatto che la distanza relativa fra Achille e la tartaruga sia dopo N passi uguale a

$$|x_{TN} - x_{AN}| = \frac{r^N}{2}$$

con $0 < r < 1$ può essere interpretato dicendo che tanti più passi si fanno tanto più la distanza diminuisce.

- Dal punto di vista fisico, fissata la distanza $|x_{TN} - x_{AN}|$ alla quale potremo considerare raggiunta la tartaruga, potremo calcolare il numero minimo di passi dopo i quali Achille sarà accanto alla tartaruga.

Studio della somma $\sum_{n=1}^{N} r^n$

- Si è proposto alla Classe di studiare la somma partendo da alcuni casi particolari:

$$1 + r = \frac{1 - r^2}{1 - r} \qquad 1 + r + r^2 = \frac{1 - r^3}{1 - r} \tag{6.1}$$

- Gli studenti hanno verificato le indentà attraverso la divisione polinomiale.
- Gli studenti sono stati invitati a congetturare possibili generalizzazioni. Alcuni hanno subito tentato attraverso il Principio d'induzione.
- Dopo la dimostrazione si è richiesto di utilizzare il risultato per spiegare come mai

$$9,\overline{9} = 10.$$

Questo problema ha coinvolto molto gli studenti.

Soluzioni 3

Conclusioni

1. Ho proposto un sondaggio...
2. Gli studenti si sono sentiti coinvolti ed alcuni sono stati molto interessati e propositivi.
3. Vi è la richiesta di un numero maggiore di temi, in alcuni sembra che concentrarsi su un problema sia difficile
4. Video di una lezione `https://drive.google.com/drive/folders/1YEJcl954LdRhdLA-kx4QhIdIgg8FY0_P`

Ringraziamenti

- Desidero ringraziare tutti gli studenti della 2Q che hanno attivamente partecipato!
- E tutti voi che avete avuto la pazienza di seguire questa presentazione :-)

Ringraziamenti

- Desidero ringraziare tutti gli studenti della 2Q che hanno attivamente partecipato!
- E tutti voi che avete avuto la pazienza di seguire questa presentazione :-)

Ringraziamenti

- Desidero ringraziare tutti gli studenti della 2Q che hanno attivamente partecipato!
- E tutti voi che avete avuto la pazienza di seguire questa presentazione :-)

Soluzioni per i quesiti sulla scala del domino

- La successione delle sporgenze per N pezzi del domino è data da: $1/2, 1/4, 1/6, \ldots 1/(2N)$.
  In generale al passo n la sporgenza è data da:
  $x_n = d(S_n) - d(S_{n-1})$. Osserviamo che:

$$n\, d(S_n) = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n-2} \left(\frac{1}{2} + d(S_i) \right) + \left(\frac{1}{2} + d(S_{n-1}) \right)$$

$$(n-1)\, d(S_{n-1}) = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n-2} \left(\frac{1}{2} + d(S_i) \right)$$

Sottraendo membro a membro le precedenti uguaglianze troviamo:

$$n(d(S_n) - d(S_{n-1})) = n\, x_n = \frac{1}{2}$$

Soluzioni per i quesiti sulla scala del domino

- Dalla relazione $n(d(S_n) - d(S_{n-1})) = n\,x_n = \frac{1}{2}$ troviamo che la sporgenza quando aggiungiamo il pezzo n del domino è:

$$x_n = \frac{1}{2n}$$

- Per i primi quattro pezzi la lunghezza totale della sporgenza delle scale è:

$$x_{tot} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{11}{12}$$

Per n pezzi

$$x_{tot} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

- La formula generale per N passi si potrà scrivere come

$$x_{tot} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

Soluzione per $S_2(N)$

- Osserviamo $S_2(N+1) = \sum_{n=1}^{N+1} n^2 = \sum_{n=1}^{N} n^2 + (N+1)^2$ quindi

$$S_2(N+1) = S_2(N) + (N+1)^2$$

- Come *Ansatz* utilizziamo $S_2(N) = \alpha\, N^3 + \beta\, N^2 + \gamma\, N$.
- Sostituendo l'*Ansatz* nell'equazione ricorsiva e svolgendo tutte le semplificazioni, l'equazione sarà risolta per ogni N se α, β, γ risolvono:

$$\begin{aligned} 3\,\alpha &= 1 \\ 3\alpha + 2\beta &= 2 \\ \alpha + \beta + \gamma &= 1. \end{aligned}$$

Facilmente si trova $\alpha = 1/3$, $\beta = 1/2$ e $\gamma = 1/6$ e quindi:

$$S_2(N) = \frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6}.$$

Studio della somma $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$

Ora mostriamo che la somma proposta cresce se N cresce.

- Scriviamo la somma esplicitamente:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} =& 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \\ & + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots\end{aligned}$$

- Osserviamo le seguenti diseguglianze

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} + \frac{1}{4} &> \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} &> \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Studio della somma $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$

- Dalle diseguaglianze

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} > \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

si può immaginare che:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\text{altri termini}$$

- Si può immaginare che anche gli altri termini possano essere stimati con altri 1/2...ora preciseremo

Studio della somma $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$

- Allora avremo che

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \frac{1}{N} >$$
$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \frac{1}{N}$$

- Consideriamo $M \in \mathbb{N}$ tale che $2^M \geq N$, avremo che la somma armonica sarà maggiore della somma:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{2} + 2^1 \frac{1}{2^2} + 2^2 \frac{1}{2^3} + 2^3 \frac{1}{2^4} + \dots + 2^{M-1} \frac{1}{2^M} + \dots + \frac{1}{N}$$

Studio della somma $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$

- La somma armonica è certamente maggiore di una somma parziale data da

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{2} + 2^1 \frac{1}{2^2} + 2^2 \frac{1}{2^3} + 2^3 \frac{1}{2^4} + \ldots + 2^{M-1} \frac{1}{2^M}$$

- Notare la presenza di M termini uguali a $1/2$. Quindi

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} > 1 + \frac{M}{2}. \tag{6.2}$$

- M è stato scelto tale che $2^M \geq N$, quindi al crescere di N crescerà corrispondentemente M e ciò mostra che la somma armonica non è limitata quando N cresce.

Studio della somma $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$

- In termini più precisi, se consideriamo la somma armonica parziale formata da blocchi che iniziano e finiscono con potenze di 2, allora il blocco di termini che vanno da 2^{m-1} a 2^m da un contributo uguale a: $\displaystyle\sum_{k=2^{m-1}}^{2^m} \frac{1}{k}$ con $1 \leq m \leq M$.
- Quindi la somma armonica potrà essere stimata da

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} > 1 + \sum_{m=2}^{M} \sum_{k=2^{m-1}}^{2^m} \frac{1}{k}.$$

- Per $2^{m-1} \leq k \leq 2^m$ possiamo stimare $(1/k) > (1/2^m)$ ed ottenere $\displaystyle\sum_{k=2^{m-1}}^{2^m} \frac{1}{k} > \frac{2^m - 2^{m-1}}{2^m} = \frac{1}{2}$ possiamo così ritrovare la stima finale (6.2).

Studio della somma $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$

Passiamo ora a studiare una somma che sappiamo essere più *piccola* di quella armonica.

- Osserviamo che la somma $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$ si può scrivere come:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2}$$

- Poiché per ogni $n > 1$ si ha $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)} > \frac{1}{n^2}$

allora:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)$$

Studio della somma $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$

- Ora un utile esercizio di manipolazione delle somme: gli studenti intuiscono che vi sono delle semplificazioni, ma formalmente possono cercare di dimostrare che $\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n-1} = 1 + \sum_{k=2}^{N-1} \frac{1}{k}$ ed osservare che $\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} = \frac{1}{N} + \sum_{n=2}^{N-1} \frac{1}{n}$.
- Le due identità precedenti ci permettono di concludere che

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{N}$$

e che per quanto si prenda N grande, la somma dei $1/n^2$ non supererà mai 2.

La somma di potenze

- Si vuole dimostrare $S(N) = \sum_{n=0}^{N} r^n = \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}$.
- Procediamo per induzione notando che nel testo si già verificata la formula per $N = 1$.

  Assumiamo di sapere che valga $S(N-1) = \frac{1 - r^N}{1 - r}$. Allora

$$S(N) = \sum_{n=0}^{N} r^n = S(N-1) + r^N$$

ma allora per l'ipotesi di induzione:

$$S(N+1) = S(N-1) + r^N = \frac{1 - r^N}{1 - r} + r^N = \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r},$$

ovvero quanto volevasi dimostrare.

La somma di potenze nel caso $r = 1/10$

- La scrittura $9,\overline{9}$ equivale a

$$9 \sum_{n=0}^{N} 10^{-n}$$

dove N il numero di cifre dopo la virgola.

- Sapendo che $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} 10^{-n} = \frac{1-10^{-N}}{1-10^{-1}}$, possiamo facilmente verificare che:

$$9 \sum_{n=0}^{N} 10^{-n} = 9\,\frac{1-10^{-N}}{\frac{9}{10}} = 10\left(1-10^{-N}\right)$$

che è tanto più vicino a 10 quanto più N è grande. Per questa ragione possiamo identificare $9,\overline{9}$ con 10.

Bibliografia

- R.P. Burn *Numbers and Functions* Cambridge U.P. (2001)
- A.Foschi, L. Mazza *Proposta per introdurre gli studenti al mondo delle sommatorie e delle serie attraverso un percorso globale e integrato con la fisica e altre discipline scientifiche* PROGETTO ALICE - 2 vol. XXI n 62 (2020)