

Dalle onde ai numeri complessi

Luca Sbano
Licei Vittoria Colonna, Roma

Introduzione

Punti salienti per il docente

- Far realizzare agli studenti filmati di fenomeni ondosi che possano essere studiati con **Tracker** e **Phyphox**. Per esempio si può utilizzare un ondoscopio ed un apparato per lo studio della diffrazione. In particolare un filmato che contenga onde libere non interagenti ed almeno un altro con onde in interazione con ostacoli.
- In aula e/o laboratorio promuovere la riflessione sulle caratteristiche qualitative e misurabili che si osservano:
 - forma dell'onda, periodicità.
 - periodo, lunghezza d'onda, ampiezza dell'onda.
- Utilizzando i filmati misurare la velocità per onde piane e onde diffratte e riflesse: la velocità, nei limiti degli errori sperimentali, non cambia.
- Utilizzando i filmati condurre gli studenti alla scoperta del principio di Huygens.
- Attraverso la periodicità costruire la fase dell'onda.
- Nella discussione sulla forma dell'onde può venir fuori che qualche studente proponga forme "sinusoidali". Condurre gli studenti verso la costruzione di un modello vettoriale per un'onda: utilizzando le proiezioni di un moto circolare ed uniforme.
- Attraverso il moto circolare uniforme introdurre l'intensità dell'onda e la sua energia.
- Proporre un'esperienza sull'interferenza per mostrare l'efficacia della descrizione vettoriale. Si può utilizzare la diffrazione da doppia fenditura.
- Sviluppo dell'algebra dei fasori sia dal punto di vista grafico che da quello algebrico formale: porre il problema della ricerca di un fasore il quadrato dia il suo opposto.

Sviluppo svolto effettivamente in 10 ore

- Far realizzare agli studenti filmati di fenomeni ondosi che possano essere studiati con **Tracker** e **Phyphox**. Per esempio si può utilizzare un ondoscopio ed un apparato per lo studio della diffrazione. In particolare un filmato che contenga onde libere non interagenti ed almeno un altro con onde in interazione con ostacoli.

- In aula e/o laboratorio promuovere la riflessione sulle caratteristiche osservabili dell'esperienza.
- Invitare gli studenti ad identificare quali grandezze possa caratterizzare il fenomeno e come misurarle. A questo proposito si suggerisce di introdurre **Tracker** e **Phyphox**.
È interessante proporre la ricerca delle grandezze rilevanti attraverso una discussione guidata. L'obbiettivo è riuscire ad identificare alcuni aspetti e le associate grandezze rilevanti:
 1. Un comportamento *periodico* nel tempo: periodo T e λ
 2. Un comportamento *periodico* nello spazio: lunghezza d'onda λ
 3. La velocità v della perturbazione ondosa.
 4. L'altezza o ampiezza A dell'onda.

Nella discussione i vari aspetti e le grandezze vengono spesso individuati secondo un ordine non definito e ciò rende il processo di "scoperta" degli studenti molto più vivo ed interessante.

- I filmati sono messi in condivisione, le misure possono anche essere svolte in aula, ma sarebbe bene dare la possibilità agli studenti di svolgere le loro elaborazioni con **Tracker** a casa.
- Andamento di A in funzione di t ed x . In generale, anche se in modo formalmente completo, gli studenti comprendono che si possono evidenziare due andamenti: A in funzione di t che assomiglia ad una sinusoidale (anche se non riconosciuta) e similmente per la posizione x .
Le due funzioni $A(t)$ ed $A(x)$ possono essere confuse, ma qui deve intervenire la discussione e gli esempi (ad esempio: osservazioni fatte da una persona sulla spiaggia) che sottolineino le differenze fra i due andamenti.
- Dai filmati e dalle misure si propone di determinare la legge del moto del profilo delle onde osservate. Questa ricerca può essere introdotta come il problema del moto del *surfista a cavallo dell'onda*. L'idea è arrivare a capire che il profilo dell'onda si muove secondo un moto rettilineo ed uniforme:

$$x(t) = vt + x_0.$$

Nella discussione è fondamentale che sia posto il problema della validità di tale legge in tutte le condizioni osservate nei filmati. Per esempio verificarla anche nei casi in cui le onde interagiscono con corpi.

- Come varia l'ampiezza per *surfista*? Questa domanda dovrebbe condurre gli studenti a capire che l'ampiezza A che è funzione sia di x sia di t si possa in realtà scriverla come funzione di $x - vt$. Ossia:

$$A(x, t) = A(x - vt).$$

Notare che questo potrebbe essere un primo concreto esempio di funzione a due variabili incontrato dagli studenti.

- A questo punto si vorrebbe introdurre la definizione di fase ϕ :

$$\phi = 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)$$

La fase ϕ è una funzione sia della posizione x che del tempo t . Per introdurla si osservi che:

- L'ampiezza è periodica sia in t che in x .
- Il moto, nei limiti delle osservazioni sperimentali, si mantiene uniforme.

Da questo segue che possiamo descrivere l'ampiezza come una funzione che dipende da una quantità di tipo "angolare" (modulare) ϕ , infatti:

$$x \mapsto x, \quad t \mapsto x + T \text{ allora } \phi \mapsto \phi + 2\pi$$

e

$$x \mapsto x + \lambda, \quad t \mapsto t \text{ allora } \phi \mapsto \phi + 2\pi$$

- Richiamare il moto armonico per mostrare (anche con un programma di geometria dinamica come **geogebra**) come un moto "ondoso semplice" possa essere descritto attraverso un vettore $\vec{A}(\phi)$ che al variare di della fase ϕ fra 0 e 2π ruoti. Si i proporrà il modello in cui:

Ad ogni onda è associata una *freccia rotante* o *fasore*: una freccia \vec{A} con una fase ϕ rispetto ad una direzione prefissata (tipicamente una retta orizzontale) e ϕ cresce ruotando da destra a sinistra.

Ogni onda può essere descritta attraverso il moto di una curva (o superficie) detta *fronte d'onda* che avanza a velocità v (\vec{v} è perpendicolare al fronte):

Principio di Huygens: Il fronte d'onda si sviluppa come inviluppo di onde elementari che si generano da ogni punto di esso.

- Energia di un'onda: ad ogni moto si associa sempre un'energia, analogia con il moto armonico mostrare che ad un onda si pu ò associare una energia pari a:

$$E \sim |\vec{A}|^2.$$

Questa relazione permette di capire come valutare l'interazione con i corpi che la circondano, poiché quando un'onda incontra un corpo si assiste sempre a uno trasferimento di energia.

- Proporre ora l'analisi più approfondita del filmato con ostacoli: è possibile capire come cambiano i fenomeni ondosi in presenza di ostacoli?

Discussione guidata su l'interferenza come "*somma di onde*", poi su:

1. Interferenza: due o più onde interagiscono combinando i loro effetti.
 2. Riflessione.
 3. Rifrazione.
- La descrizione dei fenomeni ondulatori attraverso l'*algebra delle frecce*:
 1. Costruzione dell'*algebra delle frecce* le cui regole principali sono:
 - $\vec{A}_1(\phi_1) + \vec{A}_2(\phi_2)$ corrisponde al vettore somma di $\vec{A}_1(\phi_1)$ e $\vec{A}_2(\phi_2)$.

- $\vec{A}_1(\phi_1)\vec{A}_2(\phi_2)$ corrisponde al vettore che ha come ampiezza il prodotto delle ampiezze e come fase la somma delle fasi ϕ_1 e ϕ_2 .

Si osservi che se si prendesse la differenza delle fasi si otterrebbe un prodotto non commutativo. Questa operazione può essere giustificata considerando onde che passano attraverso sequenze di processi.

- È utile osservare che per esempio $\vec{A}(\phi)\vec{A}(-\phi) = |\vec{A}|^2$.

2. Applicazioni ai fenomeni ondulatori principali.
3. Proporre agli studenti se l'algebra delle frecce possa essere riformulata in termini di funzioni sin e cos.

- Mostrare che nell'algebra delle frecce esiste un'operazione apparentemente impossibile: esistono frecce \vec{A} il cui quadrato è la freccia stessa ma con verso opposto:

$$\vec{A}^2 = -\vec{A}. \quad (1)$$

- La notazione esplicitamente vettoriale può essere fuorviante, è allora utile far notare che la si può migliorare definendo il vettore ampiezza come una coppia ordinata:

$$\vec{A}(\phi) = (A, \phi) \quad (2)$$

Con A intendiamo la misura dell'ampiezza mentre ϕ è la fase misurata da una direzione prefissata che usualmente possiamo prendere orizzontale. Le ampiezze come vettori furono chiamati da Feynman *fasori*, quindi l'algebra delle frecce è in realtà l'algebra dei fasori di Feynman e le regole sono:

1. $(A_1, \phi_1) + (A_2, \phi_2)$ corrisponde al vettore somma di due vettori di moduli rispettivamente A_1 e A_2 e fase relativa $\phi_1 - \phi_2$ (con $\phi_1 \geq \phi_2$).
2. Per la moltiplicazione vale:

$$(A_1, \phi_1) \cdot (A_2, \phi_2) = (A_1 A_2, \phi_1 + \phi_2).$$

3. Dalla precedente regola segue che:

$$(A, \phi) \cdot (A, -\phi) = (A^2, 0).$$

Ci si può allora porre il problema di utilizzare la definizione (2) per provare la relazione (1) che in termini di fasori si riscrive:

$$(A^2, 2\phi) = (A, \pi)$$

da cui segue che l'unica soluzione non banale è un fasore con $A = 1$ e $\phi = \pi/2 \simeq 90^\circ$. Il fasore $(1, \pi/2)$ risulta essere un vettore ortogonale all'asse prefissato per la misura di ϕ , mentre (A, π) è il fasore opposto a $(A, 0)$.

- Con il metodo grafico, utilizzando le proprietà dei triangoli, non è difficile verificare che

$$(A, \phi) + (A, -\phi) = (2A \cos \phi, 0).$$

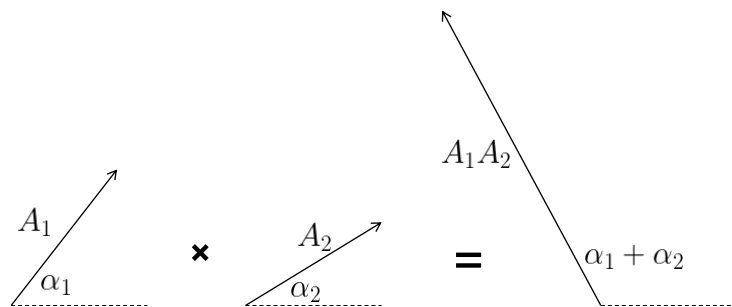


Figura 1: È possibile svolgere i calcoli con i fasori utilizzando un metodo grafico. In figura è mostrato come raffigurare il calcolo del prodotto. È utile invitare gli studenti a sviluppare alcuni esempi attraverso questo tipo di schema.

- Con i fasori è possibile calcolare l'intensità/energia di un'ampiezza che sia la somma di due ampiezze diverse:

$$\begin{aligned}
 |(A_1, \phi_1) + (A_2, \phi_2)| &= [(A_1, \phi_1) + (A_2, \phi_2)] \cdot [(A_1, -\phi_1) + (A_2, -\phi_2)] = \\
 &= (A_1^2 + (A_1 A_2, \phi_1 - \phi_2) + (A_1 A_2, \phi_2 - \phi_1) + A_2^2, 0) = \\
 &= (A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2), 0) =
 \end{aligned} \tag{3}$$

- A questo punto, se la classe già conosce il campo dei numeri complessi \mathbb{C} si potrà proporre di far riconoscere che l'algebra delle *freccie rotanti* è isomorfa a quella di \mathbb{C} . Altrimenti sull'argomento ci si potrà tornare al momento opportuno.
- Con un'esperienza d'interferenza e di diffrazione si può cercare di verificare la relazione (3), in particolare con una doppia fenditura con due raggi di uguale ampiezza si ha

$$I_{12} = A^2(1 + \cos(\phi_1 - \phi_2))$$

con

- (a) frange scure per $I_{12} = 0$ ovvero $\phi_1 - \phi_2 = (2n + 1)\pi$, $n \in \mathbb{N}$;
- (b) frange chiare per $I_{12} = A^2$ ovvero $\phi_1 - \phi_2 = 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$.

Due onde con la stessa lunghezza d'onda e periodo che arrivano in un punto allo stesso istante e provengono da sorgenti poste in luoghi diversi avranno una differenza di fase

$$\phi_1 - \phi_2 = 2\pi \left(\frac{x_1}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) - 2\pi \left(\frac{x_2}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) = 2\pi \frac{x_1 - x_2}{\lambda} = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} \tag{4}$$

Quindi

- (a) frange scure per $I_{12} = 0$ ovvero $\Delta x = (n + 1/2)\lambda$, $n \in \mathbb{N}$;
- (b) frange chiare per $I_{12} = A^2$ ovvero $\Delta x = n\lambda$, $n \in \mathbb{N}$.

Scheda n.1

Ogni partecipante ha un quaderno di laboratorio sul quale deve annotare le sue osservazioni ed il suo telefono con installato **Phyphox** per le misure.

L'ondoscopio

1. Osserva il funzionamento dell'ondoscopio e prova spiegarne il funzionamento.
2. Individuare le grandezze che possano caratterizzare i fenomeni osservati.
3. Interazione fra onde ed ostacoli.
 - Onde senza ostacoli.
 - Onde con un singolo ostacolo: descrizione dettagliata del fenomeno.
 - Onde con due ostacoli: descrizione dettagliata del fenomeno.
 - È importante registrare su un filmato l'esperienza con l'ondoscopio. Fare attenzione ad includere un regolo per la calibrazione che sarà necessaria quando il filmato verrà analizzato con **Tracker**.

Quali sono le grandezze che si possono utilizzare per descrivere i moti ondosi?

Impariamo ad utilizzare phyphox

1. Il menu di **phyphox**.
2. Visualizzazione di onde sonore con: **Audio Scope**.
3. Generazione di toni con: **Tone generator**.
4. Studio in gruppo della generazione e rilevazione di onde: uno studente genera un tono fissandone a suo piacere, gli altri cercano di identificarne le caratteristiche con il proprio **phyphox**.
5. Caso di due sorgenti fisse con le stesse caratteristiche. Con un terzo telefono si studi l'interazione delle due sorgenti. Cosa si può osservare?

Quali sono le grandezze che si possono utilizzare per descrivere i suoni e le loro interazioni?

Scheda n.2

Obiettivi

1. Raccogliere e commentare le osservazioni svolte dagli studenti sulla scheda n.1.
2. Imparare ad utilizzare **Tracker** per analizzare i video del ondoscopio.
3. Attraverso la discussione grandezze fisiche rilevanti per descrivere il fenomeno e formulare - se possibile - ipotesi.

Osservazioni degli studenti

- Le "onde d'acqua" presentano strutture diverse nei diversi filmati: onde lungo una "linea", onde con un "centro".
- Si osservano moti "uniformi".
- Uno studente osserva che l'onda può essere descritta attraverso un grafico tipo "sinusoide" (*ma non la cita esplicitamente*) con in ascissa il tempo. Alla domanda sull'ordinata risponde con l'ampiezza. Alla richiesta di confronto con il filmato, lo studente sembra confuso e solo dopo un pò di tempo realizza che vi dee essere una differenza.
- Alcuni studenti citano come grandezza coinvolta l'energia ed iniziano a collegarla al moto dell'acqua.
- Alcuni si accorgono del problema di capire dal filmato dove sono i picchi ed i ventri dell'onda. Questo porta alla definizione della lunghezza d'onda λ .
- Per usare **Tracker** è necessario fissare un riferimento e ciò induce uno studente a porsi il problema di capire dove inizi e dove finisce l'onda.
- Uno studente propone di misurare la lunghezza d'onda λ utilizzando la singola foto e definendo λ partendo dall'osservazione di come cambiano le zone chiare e le zone scure.
- Due studenti suggeriscono che se per ampiezza s'intende l'altezza dell'onda questa non può essere misurata a partire dalle immagini dell'ondoscopio nelle quali non si riesce a percepire quanto l'onda sia alta sulla superficie del liquido.
- Si propone di usare **Tracker** per misurare la velocità dell'onda in varie zone e nei tre diversi filmati.

Conclusioni della discussione e questioni aperte

- Sono state identificate e definite le seguenti grandezze: il periodo T , la frequenza f , la lunghezza d'onda λ , la velocità v e si accennato all'ampiezza e all'energia dell'onda.

Q : Come cambiano le grandezze T , λ e v nei tre casi filmati:

1. Onde libera.
2. Onde con un ostacolo.

3. Onde con due ostacoli.
4. Si ha l'impressione che le l'onde si muovano di moto uniforme, è possibile verificare quest'impressione con opportune misure?

Per rispondere a **Q** si utilizzerà **Tracker**.

Scheda n.3

Domande guidate di analisi dei filmati:

1. Utilizzando i filmati ottenuti con **Tracker** e **Phyphox** prova giustificare qualitativamente l'introduzione del periodo T , della frequenza f , della lunghezza d'onda λ e della velocità v per descrivere l'esperienza.
2. Descrivi i procedimenti che tu proporresti per misurare le grandezze precedenti.
3. Durante la discussione di laboratorio, uno studente ha suggerito due rappresentazioni grafiche rispettivamente per l'ampiezza A in funzione tempo t e per A in funzione della posizione x . Quali sono queste due rappresentazioni? Come si possono giustificare in modo qualitativo?
4. Sempre utilizzando i filmati, quale moto eseguirà una particella di fluido? Quale relazione si può ipotizzare che leghi T , λ e v ?
5. L'ampiezza A da quali grandezze si può ipotizzare che dipenda?
6. Immagina un surfista che si faccia portare dall'onda: come varia l'ampiezza sulla quale viaggia?
7. Considera il filmato con onde che incontrano ostacoli. Come descriveresti qualitativamente il fenomeno? Cosa si può dire delle grandezze T , λ , v ed A ?

Scheda n.4

Domande guidate di analisi dei filmati e sull'elaborazione matematica:

1. Quali sono le grandezze fisiche che descrivono un'onda?
2. Cosa descrive l'ampiezza A di un'onda e da quali grandezze si può ipotizzare che dipenda?
3. Immagina un surfista che si faccia portare dall'onda: come varia l'ampiezza sulla quale viaggia?
4. Cosa è la fase di un'onda e quali sono le sue proprietà?
5. Cosa è un *fasore* e a quale scopo viene introdotto?
6. Quali fenomeni avvengono quando due o più onde interagiscono?
7. Come descriviamo l'interazione fra due o più onde?
8. Possono esistere onde che interagendo si elidono reciprocamente? Come viene descritto tale fenomeno utilizzando i *fasori*?
9. Nell'ultima esperienza si è considerato il fenomeno della diffrazione, qual è la sua descrizione qualitativa e quantitativa?
10. È vero che le regole introdotte per svolgere i calcoli (*algebra dei fasori*) ammettono fasori il cui quadrato è uguale a meno se stesso?