

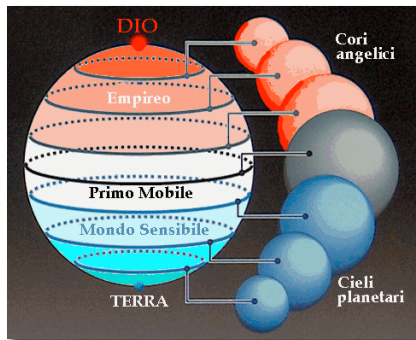
S^3 e l'ipersfera di Dante

Luca Sbano

Licei *Vittoria Colonna*,
Roma

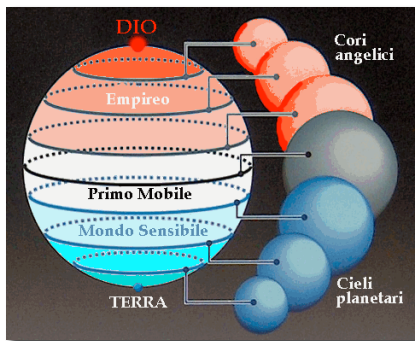
Seminari per il Liceo Matematico, 11 aprile 2017

L'universo secondo Dante Alighieri



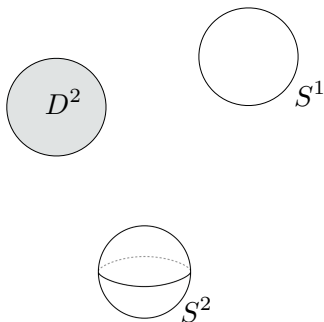
- La natura geometrica della costruzione dantesca può essere chiarita utilizzando quelle tecniche matematiche che ci permettono di costruire oggetti complessi a partire da oggetti più semplici.

L'universo secondo Dante Alighieri



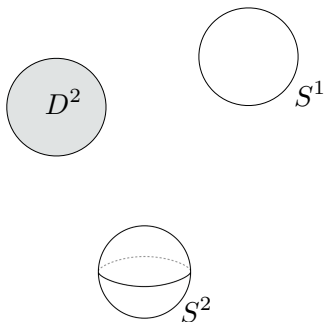
- La natura geometrica della costruzione dantesca può essere chiarita utilizzando quelle tecniche matematiche che ci permettono di costruire oggetti complessi a partire da oggetti più semplici.

I mattoncini



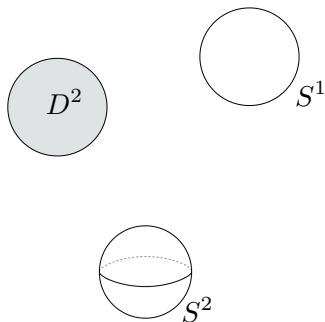
- D è un disco (o palla), D^2 è il disco o palla in dimensione 2,
- S è una sfera S^1 è la circonferenza o sfera in dimensione 1,
- S^2 è la superficie sferica.
- Possiamo usare D^2 , S^1 per costruire S^2 ?

I mattoncini



- D è un disco (o palla), D^2 è il disco o palla in dimensione 2,
- S è una sfera S^1 è la circonferenza o sfera in dimensione 1,
- S^2 è la superficie sferica.
- Possiamo usare D^2 , S^1 per costruire S^2 ?

I mattoncini



- D è un disco (o palla), D^2 è il disco o palla in dimensione 2,
- S è una sfera S^1 è la circonferenza o sfera in dimensione 1,
- S^2 è la superficie sferica.
- Possiamo usare D^2 , S^1 per costruire S^2 ?

Con quali strumenti possiamo operare?

La *topologia*

- È quella branca della matematica che si interessa delle proprietà che non cambiano quando due oggetti geometrici sono trasformati l'uno nell'altro tramite una *trasformazione continua*.
- Un trasformazione geometrica si dice *continua* se non provoca *lesioni* nell'ente geometrico su cui agisce.

La topologia

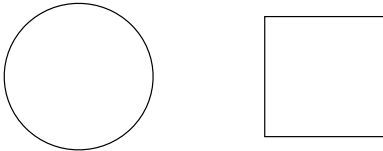
- È quella branca della matematica che si interessa delle proprietà che non cambiano quando due oggetti geometrici sono trasformati l'uno nell'altro tramite una *trasformazione continua*.
- Un trasformazione geometrica si dice *continua* se non provoca *lesioni* nell'ente geometrico su cui agisce.

La topologia

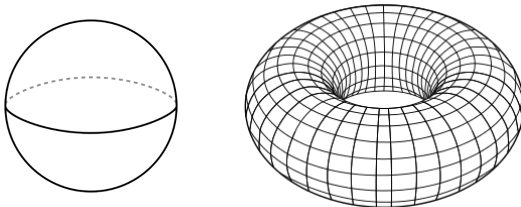
- È quella branca della matematica che si interessa delle proprietà che non cambiano quando due oggetti geometrici sono trasformati l'uno nell'altro tramite una *trasformazione continua*.
- Un trasformazione geometrica si dice *continua* se non provoca *lesioni* nell'ente geometrico su cui agisce.

Esempi

- Con una deformazione **continua** posso trasformare un disco in un quadrato...*creando* i suoi angoli



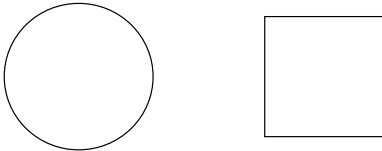
- ...ma è impossibile trasformare una palla in una ciambella...**c'è**



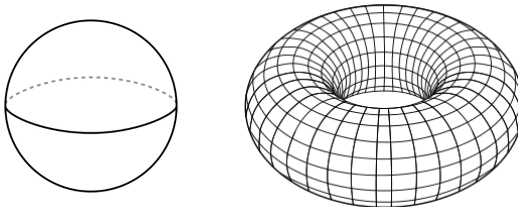
il buco!

Esempi

- Con una deformazione **continua** posso trasformare un disco in un quadrato...*creando* i suoi angoli



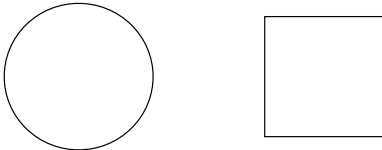
- ...ma è impossibile trasformare una palla in una ciambella...*c'è*



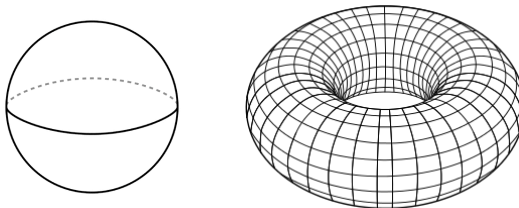
il buco!

Esempi

- Con una deformazione **continua** posso trasformare un disco in un quadrato...*creando* i suoi angoli



- ...ma è impossibile trasformare una palla in una ciambella...**c'è**



il buco!

Regole di lavoro

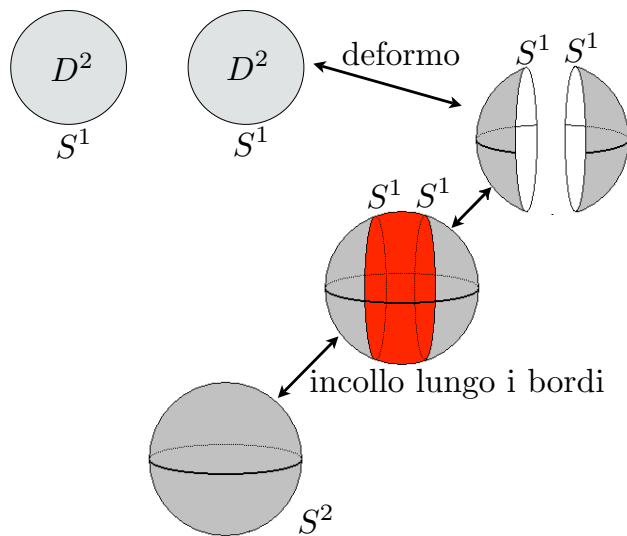
- Possiamo deformare in modo **continuo** gli oggetti che ci interessano.
- Possiamo incollare oggetti semplici per produrre strutture più complesse.

Regole di lavoro

- Possiamo deformare in modo **continuo** gli oggetti che ci interessano.
- Possiamo incollare oggetti semplici per produrre strutture più complesse.

Regole di lavoro

- Possiamo deformare in modo **continuo** gli oggetti che ci interessano.
- Possiamo incollare oggetti semplici per produrre strutture più complesse.

Costruiamo la sfera S^2 

Il punto di vista di Dante

- Secondo Dante l'universo sarebbe formato da due palle, una contenente al centro la Terra e circondata dal mondo sensibile, l'altra contiene l'universo soprannaturale e Dio.
- Le due palle confinano (*cobordano*) nella sfera del *primo mobile*.
- Questa visione poetica può essere tradotta nel linguaggio della geometria...

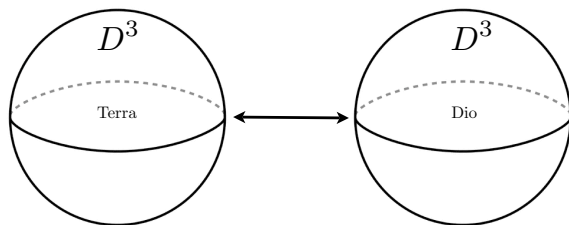
Il punto di vista di Dante

- Secondo Dante l'universo sarebbe formato da due palle, una contenente al centro la Terra e circondata dal mondo sensibile, l'altra contiene l'universo soprannaturale e Dio.
- Le due palle confinano (*cobordano*) nella sfera del *primo mobile*.
- Questa visione poetica può essere tradotta nel linguaggio della geometria...

Il punto di vista di Dante

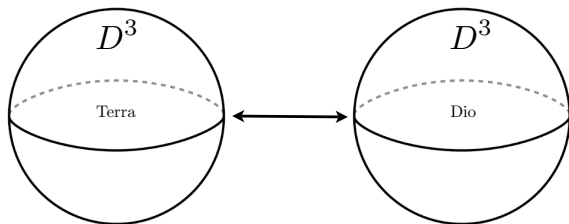
- Secondo Dante l'universo sarebbe formato da due palle, una contenente al centro la Terra e circondata dal mondo sensibile, l'altra contiene l'universo soprannaturale e Dio.
- Le due palle confinano (*cobordano*) nella sfera del *primo mobile*.
- Questa visione poetica può essere tradotta nel linguaggio della geometria...

La sfera in tre dimensioni S^3



- La frontiera di una palla D^3 è la sua superficie sferica S^2 .
- Incollando due palle D^3 lungo le loro frontiere (bordi) S^2 si ottiene la sfera tridimensionale (ipersfera) S^3 .

La sfera in tre dimensioni S^3



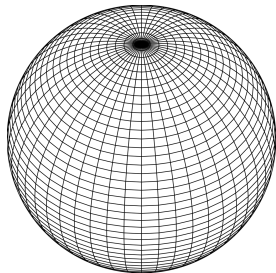
- La frontiera di una palla D^3 è la sua superficie sferica S^2 .
- Incollando due palle D^3 lungo le loro frontiere (bordi) S^2 si ottiene la sfera tridimensionale (ipersfera) S^3 .

Un po' d'astrazione...

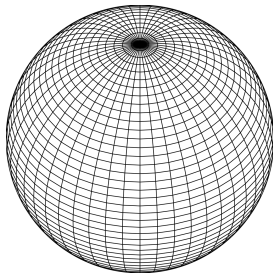
- Noi viviamo in un modo a 3 dimensioni e quindi possiamo apprezzare le tre direzioni spaziali ma non se lo spazio abbia le caratteristiche di una superficie a 3 dimesioni.
- E' necessario quindi **astrarre** per comprendere le procedure e rappresentare graficamente S^3 *come se fosse* S^2 ...

Un po' d'astrazione...

- Noi viviamo in un modo a 3 dimensioni e quindi possiamo apprezzare le tre direzioni spaziali ma non se lo spazio abbia le caratteristiche di una superficie a 3 dimensioni.
- E' necessario quindi **astrarre** per comprendere le procedure e rappresentare graficamente S^3 *come se fosse* S^2 ...

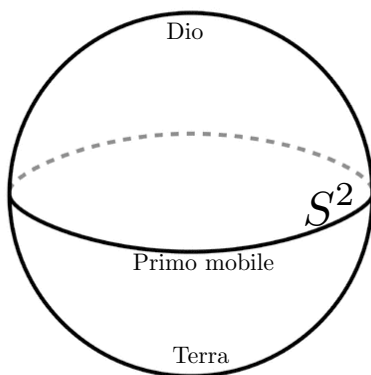
S^2 

I cerchi massimi sono S^1

 S^3 

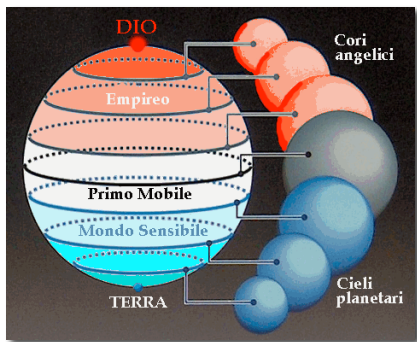
I cerchi massimi sono S^2

Un modello per l'ipersfera S^3 di Dante



Identifichiamo S^3 con un S^2 i cui cerchi massimi sono in rettà sfere.

L'ipersfera S^3 di Dante



Possiamo quindi utilizzare le analogie fra le costruzioni di S^2 e S^3 per leggere la geometria dell'universo Dantesco.