Informazione, entropia e comprimibilità

Michela Barsanti e Luca Sbano
(Licei *Vittoria Colonna*)

Roma 13 Marzo 2020

Indice

Contesto

- Una Classe 4^o di un liceo scientifico delle scienze applicate.
- La classe ha già svolto un modulo di probabilità e statistica bivariata, conosce la funzione logaritmo.
- L'attività ha avuto una durata complessiva di *****.

Motivazioni

- Esplorare il significato di cosa sia l'*informazione* e della sua possibile misura.
- La nozione di entropia in vari contesti...
- Porre il problema della comprimibilità dell'informazione...

Aleatorio e Casuale

Aleatorio e casuale possono essere utilizzati come sinonimi in un contesto matematico ma occorre tener presente alcune sottigliezze...

Per cominciare (*Vocabolario Treccani*)

aleatorio agg. [dal lat. aleatorius, der. di alea gioco di dadi]. Rischioso, incerto: [...] Nel calcolo delle probabilità è sinon. di casuale o stocastico: variabile o numero a.; processo a. o stocastico, modello matematico impiegato per studiare l'evolversi nel tempo dei fenomeni dipendenti da fattori casuali, per es. nei problemi delle assicurazioni, nella descrizione del comportamento delle particelle, ecc.

casuale agg. [dal lat. tardo casualis, der. di casus -us caso]. Che dipende dal caso, che avviene o si fa per caso: un incontro c.; per una c. sbadataggine; [...] In statistica, nel calcolo delle probabilità, nelle applicazioni tecniche e nelle scienze sperimentali, che ha il carattere dell'imprevedibilità, che non è descrivibile in modo determinato ma obbedisce a leggi statistiche probabilistiche: fenomeno c. (o aleatorio); processo c. (o aleatorio), modello matematico di un fenomeno casuale costruito mediante gli strumenti della probabilità e della statistica;...

Un punto interessante...

- stocastico agg. [dal gr. $\sigma\tau o\chi\alpha\iota\kappa\acute{o}\zeta$ congetturale, propr. che mira bene, abile nel congetturare, der. di $\sigma\tau o\chi\alpha\zeta o\mu\alpha'\iota$ mirare, congetturare da $\sigma\tau o\chi\acute{o}\zeta$ bersaglio, mira, congettura]

  L'aggettivo stocastico rimanda ad una doppio aspetto uno deterministico ed uno non deterministico sempre presenti nei fenomeni...

Un punto interessante...

- stocastico agg. [dal gr. $\sigma\tau o\chi\alpha\iota\kappa\acute{o}\zeta$ congetturale, propr. che mira bene, abile nel congetturare, der. di $\sigma\tau o\chi\alpha\zeta o\mu\alpha'\iota$ mirare, congetturare da $\sigma\tau o\chi\acute{o}\zeta$ bersaglio, mira, congettura]

  L'aggettivo stocastico rimanda ad una doppio aspetto uno deterministico ed uno non deterministico sempre presenti nei fenomeni...

Notazioni

- Chiamiamo stringa un insieme finito di caratteri o numeri.
- Chiamiamo successione un insieme di caratteri che non hanno un elemento ultimo (*stringe di infiniti caratteri*).

  Se si utilizza il solo termine successione è importante che gli studenti osservino la distinzione fra *successioni* e *successioni finite*.

  In generale si nota che la capacità degli studenti di cogliere questo aspetto non appare in modo naturale soprattutto nelle classi iniziali.

Notazioni

- Chiamiamo stringa un insieme finito di caratteri o numeri.
- Chiamiamo successione un insieme di caratteri che non hanno un elemento ultimo (*stringe di infiniti caratteri*).

  Se si utilizza il solo termine successione è importante che gli studenti osservino la distinzione fra *successioni* e *successioni finite*.
  In generale si nota che la capacità degli studenti di cogliere questo aspetto non appare in modo naturale soprattutto nelle classi iniziali.

Modalità di lavoro

- In classe si possono far lavorare gli studenti in gruppi da tre.
- Si propongono tre giochi.

Modalità di lavoro

- In classe si possono far lavorare gli studenti in gruppi da tre.
- Si propongono tre giochi.

Scheda di lavoro

Ai gruppi viene proposto il seguente gioco: *Uno di voi immagini di scegliere un numero fra* 0 *e* 63 *(estremi inclusi). Gli altri studenti devono cercare di indovinare il numero ponendo delle semplici domande a cui si possa rispondere con un si o con un no senza ulteriori commenti.*

1. Qual è il numero massimo di domande si possono fare per ottenere la risposta?
2. Qual è il numero minimo di domande che si possono fare per indovinare?
3. Quale relazione si può immaginare fra il numero di elementi dell'insieme $A = \{0, ..., 63\}$ e il numero minimo (che indicheremo con $I(A)$) di domande trovate?

Prima parte

- Nei gruppi a rotazione uno pensa un mumero nel gange assegnato $[n, n+63]$, gli altri due porranno una domanda a turno.
- 10 minuti per indovinare tutti e tre i giocatori del gruppo.
- 10 minuti: discussione regolamentata.
- Il docente chiede chi ha ottimizzato la strategia.
- Il docente proietta una slide con:
  Ho pensato un numero, per fare prima nell'intervallo di ampiezza metà.
- Gli alunni devono stimare il numero di domande e poi cominciare a porle una per banco in modo da verificare la compresione del processo.

Seconda parte

- 15 minuti scheda con le due tabelle $41, 20$ con commento e conclusioni.
- 15 minuti per $A \times B$ esempio e generalizzazione
- Domanda da lasciare aperta: Quando un prodotto diventa una somma? Conosci una funzione che si comporta così?

Strategia 1

- La richiesta di domande binarie (si no) suggerisce di usare le relazioni d'ordine $\geq, \leq$ e cercare di avvicinarsi al numero nascosto con un procedimento per eccesso e per difetto.
- Si può per esempio dividere il numero di elementi in A per 2 e chiedere se $x \geq |A|/2 = 32$. Poi se la risposta è positiva vorrà dire che $x \in [32, 63]$, la risposta negativa implicherà $x \in [0, 32]$.
- La procedura potrà essere iterata.
- qualè il numero minimo di iterazioni $I(A)$ per trovare il numero?

Strategia 1

- La richiesta di domande binarie (si no) suggerisce di usare le relazioni d'ordine $\geq, \leq$ e cercare di avvicinarsi al numero nascosto con un procedimento per eccesso e per difetto.
- Si può per esempio dividere il numero di elementi in A per 2 e chiedere se $x \geq |A|/2 = 32$. Poi se la risposta è positiva vorrà dire che $x \in [32, 63]$, la risposta negativa implicherà $x \in [0, 32]$.
- La procedura potrà essere iterata.
- qualè il numero minimo di iterazioni $I(A)$ per trovare il numero?

Strategia 2

Posto $x \in \{0, \ldots, 63\}$, ecco un'altra possibile strategia:

1. $x \geq 32 \mod 64$
2. $x \geq 16 \mod 32$
3. $x \geq 8 \mod 16$
4. $x \geq 4 \mod 8$
5. $x \geq 2 \mod 4$
6. $x \geq 1 \mod 2$

Il numero di domande $I(A)$ binarie è 6

Qual è la relazione fra il numero di elementi in A ed il numero di domande (si,no)?

Se ad ogni risposta positiva si assegna 1 e 0 per quelle negative, a cosa corrisponde la sequenza di 1 e 0 così ottenuta?

Il numero di domande $I(A)$ binarie è 6

Qual è la relazione fra il numero di elementi in A ed il numero di domande (si,no)?

Se ad ogni risposta positiva si assegna 1 e 0 per quelle negative, a cosa corrisponde la sequenza di 1 e 0 così ottenuta?

Il numero di domande $I(A)$ binarie è 6

Qual è la relazione fra il numero di elementi in A ed il numero di domande (si,no)?

Se ad ogni risposta positiva si assegna 1 e 0 per quelle negative, a cosa corrisponde la sequenza di 1 e 0 così ottenuta?

Il numero di domande $I(A)$ binarie è 6

Qual è la relazione fra il numero di elementi in A ed il numero di domande (si,no)?

Se ad ogni risposta positiva si assegna 1 e 0 per quelle negative, a cosa corrisponde la sequenza di 1 e 0 così ottenuta?

41

Ho pensato 41	Modulo	Risposta	Si= 1, No= 0	Valore
$x \geq 32$	mod 64			
$x \geq 16$	mod 32			
$x \geq 8$	mod 16			
$x \geq 4$	mod 8			
$x \geq 2$	mod 4			
$x \geq 1$	mod 2			

- Quale informazione puoi trarre da ogni riga?
- Qual informazione complessiva puoi indovinare?

20

Ho pensato 20	Modulo	Risposta	Si= 1, No= 0	Valore
$x \geq 32$	mod 64			
$x \geq 16$	mod 32			
$x \geq 8$	mod 16			
$x \geq 4$	mod 8			
$x \geq 2$	mod 4			
$x \geq 1$	mod 2			

- Quale informazione puoi trarre da ogni riga?
- Qual informazione complessiva puoi indovinare?

Una variante del gioco del 63

- Si prendano per esempio due insiemi $B = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ e $C = \{0, 1, 2, 3\}$ si può lo stesso tipo di gioco sia con B che con C e determinare $I(B)$ e $I(C)$.
- Si può poi costruire l'insieme prodotto $B \times C$ i cui elementi possono essere messi in corrispondenza biunivoca con gli interi da 0 a 36.
- Scelto un elemento di $B \times C$, in quante domande lo si può determinare?
- Che relazione si può immaginare fra $I(B), I(C)$ e $I(B \times C)$?
- Quale funzione conosci che soddisfa una relazione del tipo:

$$I(B \times C) = I(B) + I(C) \qquad ?\text{(Fine prima lezione)}$$

Una variante del gioco del 63

- Si prendano per esempio due insiemi $B = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ e $C = \{0, 1, 2, 3\}$ si può lo stesso tipo di gioco sia con B che con C e determinare $I(B)$ e $I(C)$.
- Si può poi costruire l'insieme prodotto $B \times C$ i cui elementi possono essere messi in corrispondenza biunivoca con gli interi da 0 a 36.
- Scelto un elemento di $B \times C$, in quante domande lo si può determinare?
- Che relazione si può immaginare fra $I(B), I(C)$ e $I(B \times C)$?
- Quale funzione conosci che soddisfa una relazione del tipo:

$$I(B \times C) = I(B) + I(C) \qquad ?(\text{Fine prima lezione})$$

Una variante del gioco del 63

- Si prendano per esempio due insiemi $B = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ e $C = \{0, 1, 2, 3\}$ si può lo stesso tipo di gioco sia con B che con C e determinare $I(B)$ e $I(C)$.
- Si può poi costruire l'insieme prodotto $B \times C$ i cui elementi possono essere messi in corrispondenza biunivoca con gli interi da 0 a 36.
- Scelto un elemento di $B \times C$, in quante domande lo si può determinare?
- Che relazione si può immaginare fra $I(B), I(C)$ e $I(B \times C)$?
- Quale funzione conosci che soddisfa una relazione del tipo:

$$I(B \times C) = I(B) + I(C) \qquad ?\text{(Fine prima lezione)}$$

Una variante del gioco del 63

- Si prendano per esempio due insiemi $B = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ e $C = \{0, 1, 2, 3\}$ si può lo stesso tipo di gioco sia con B che con C e determinare $I(B)$ e $I(C)$.
- Si può poi costruire l'insieme prodotto $B \times C$ i cui elementi possono essere messi in corrispondenza biunivoca con gli interi da 0 a 36.
- Scelto un elemento di $B \times C$, in quante domande lo si può determinare?
- Che relazione si può immaginare fra $I(B), I(C)$ e $I(B \times C)$?
- Quale funzione conosci che soddisfa una relazione del tipo:

$$I(B \times C) = I(B) + I(C) \qquad ?(\text{Fine prima lezione})$$

Contenuto di informazione secondo Shannon

- La funzione $I(x)$ misura la quantità d'informazione contenuta in $x \in \mathcal{A}$.
- La funzione $I(x)$ soddisfa le proprietà della funzione logaritmo.
- Shannon definisce il *Contenuto di informazione* come:

$$I(x) = \log_2 \left(\frac{1}{p(x)} \right).$$

  dove $p(x)$ è la probabilità che un elemento di $\mathcal{A}$ sia scelto a caso. Se le x sono equiprobabili, allora $p(x) = 1/|\mathcal{A}|$ e $I(x) = \log_2(|\mathcal{A}|)$.
- Notare che il logaritmo rende l'*informazione* $I(.)$ additiva.

Contenuto di informazione secondo Shannon

- La funzione $I(x)$ misura la quantità d'informazione contenuta in $x \in \mathcal{A}$.
- La funzione $I(x)$ soddisfa le proprietà della funzione logaritmo.
- Shannon definisce il *Contenuto di informazione* come:

$$I(x) = \log_2 \left(\frac{1}{p(x)} \right).$$

  dove $p(x)$ è la probabilità che un elemento di $\mathcal{A}$ sia scelto a caso. Se le x sono equiprobabili, allora $p(x) = 1/|\mathcal{A}|$ e $I(x) = \log_2(|\mathcal{A}|)$.
- Notare che il logaritmo rende l'*informazione* $I(.)$ additiva.

Contenuto di informazione secondo Shannon

- La funzione $I(x)$ misura la quantità d'informazione contenuta in $x \in \mathcal{A}$.
- La funzione $I(x)$ soddisfa le proprietà della funzione logaritmo.
- Shannon definisce il *Contenuto di informazione* come:

$$I(x) = \log_2 \left(\frac{1}{p(x)} \right).$$

  dove $p(x)$ è la probabilità che un elemento di $\mathcal{A}$ sia scelto a caso. Se le x sono equiprobabili, allora $p(x) = 1/|\mathcal{A}|$ e $I(x) = \log_2(|\mathcal{A}|)$.
- Notare che il logaritmo rende l'*informazione* $I(.)$ additiva.

Contenuto di informazione secondo Shannon

- La funzione $I(x)$ misura la quantità d'informazione contenuta in $x \in \mathcal{A}$.
- La funzione $I(x)$ soddisfa le proprietà della funzione logaritmo.
- Shannon definisce il *Contenuto di informazione* come:

$$I(x) = \log_2 \left(\frac{1}{p(x)} \right).$$

dove $p(x)$ è la probabilità che un elemento di $\mathcal{A}$ sia scelto a caso. Se le x sono equiprobabili, allora $p(x) = 1/|\mathcal{A}|$ e $I(x) = \log_2(|\mathcal{A}|)$.

- Notare che il logaritmo rende l'*informazione* $I(.)$ additiva.

Contenuto di informazione secondo Shannon

- La funzione $I(x)$ misura la quantità d'informazione contenuta in $x \in \mathcal{A}$.
- La funzione $I(x)$ soddisfa le proprietà della funzione logaritmo.
- Shannon definisce il *Contenuto di informazione* come:

  $$I(x) = \log_2 \left(\frac{1}{p(x)} \right).$$

  dove $p(x)$ è la probabilità che un elemento di $\mathcal{A}$ sia scelto a caso. Se le x sono equiprobabili, allora $p(x) = 1/|\mathcal{A}|$ e $I(x) = \log_2(|\mathcal{A}|)$.
- Notare che il logaritmo rende l'*informazione* $I(.)$ additiva.

Esempi

- Moneta non truccata: $\mathcal{A} = \{T, C\}$ con $p(T) = 1/2$, $p(C) = 1/2$, quanto quanto vale l'nformazione?
- Moneta truccata: $\mathcal{A} = \{T, C\}$ con $p(T) = 1/3$, $p(C) = 2/3$, quanto quanto vale l'nformazione?
- Stringhe di elemti di $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ formate da coppie distinguibili. Con quali probabilità? (Considerate per esempio $p(0) = p(1) = 1/2$).
- Stringhe di elemti di $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ formate da coppie indistinguibili. Con quali probabilità? (Considerate per esempio $p(0) = p(1) = 1/2$).
- Stringhe di elementi di $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ formate doppiette e poi triplette...

Esempi

- Moneta non truccata: $\mathcal{A} = \{T, C\}$ con $p(T) = 1/2$, $p(C) = 1/2$, quanto quanto vale l'nformazione?
- Moneta truccata: $\mathcal{A} = \{T, C\}$ con $p(T) = 1/3$, $p(C) = 2/3$, quanto quanto vale l'nformazione?
- Stringhe di elemti di $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ formate da coppie distinguibili. Con quali probabilità? (Considerate per esempio $p(0) = p(1) = 1/2$).
- Stringhe di elemti di $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ formate da coppie indistinguibili. Con quali probabilità? (Considerate per esempio $p(0) = p(1) = 1/2$).
- Stringhe di elementi di $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ formate doppiette e poi triplette...

Esempi

- Moneta non truccata: $\mathcal{A} = \{T, C\}$ con $p(T) = 1/2$, $p(C) = 1/2$, quanto quanto vale l'nformazione?
- Moneta truccata: $\mathcal{A} = \{T, C\}$ con $p(T) = 1/3$, $p(C) = 2/3$, quanto quanto vale l'nformazione?
- Stringhe di elemti di $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ formate da coppie distinguibili. Con quali probabilità? (Considerate per esempio $p(0) = p(1) = 1/2$).
- Stringhe di elemti di $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ formate da coppie indistinguibili. Con quali probabilità? (Considerate per esempio $p(0) = p(1) = 1/2$).
- Stringhe di elementi di $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ formate doppiette e poi triplette...

Esempi

- Moneta non truccata: $\mathcal{A} = \{T, C\}$ con $p(T) = 1/2$, $p(C) = 1/2$, quanto quanto vale l'nformazione?
- Moneta truccata: $\mathcal{A} = \{T, C\}$ con $p(T) = 1/3$, $p(C) = 2/3$, quanto quanto vale l'nformazione?
- Stringhe di elemti di $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ formate da coppie distinguibili. Con quali probabilità? (Considerate per esempio $p(0) = p(1) = 1/2$).
- Stringhe di elemti di $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ formate da coppie indistinguibili. Con quali probabilità? (Considerate per esempio $p(0) = p(1) = 1/2$).
- Stringhe di elementi di $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ formate doppiette e poi triplette...

Esempi

- Moneta non truccata: $\mathcal{A} = \{T, C\}$ con $p(T) = 1/2$, $p(C) = 1/2$, quanto quanto vale l'nformazione?
- Moneta truccata: $\mathcal{A} = \{T, C\}$ con $p(T) = 1/3$, $p(C) = 2/3$, quanto quanto vale l'nformazione?
- Stringhe di elemti di $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ formate da coppie distinguibili. Con quali probabilità? (Considerate per esempio $p(0) = p(1) = 1/2$).
- Stringhe di elemti di $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ formate da coppie indistinguibili. Con quali probabilità? (Considerate per esempio $p(0) = p(1) = 1/2$).
- Stringhe di elementi di $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ formate doppiette e poi triplette...

Esempi

- Moneta non truccata: $\mathcal{A} = \{T, C\}$ con $p(T) = 1/2$, $p(C) = 1/2$, quanto quanto vale l'nformazione?
- Moneta truccata: $\mathcal{A} = \{T, C\}$ con $p(T) = 1/3$, $p(C) = 2/3$, quanto quanto vale l'nformazione?
- Stringhe di elemti di $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ formate da coppie distinguibili. Con quali probabilità? (Considerate per esempio $p(0) = p(1) = 1/2$).
- Stringhe di elemti di $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ formate da coppie indistinguibili. Con quali probabilità? (Considerate per esempio $p(0) = p(1) = 1/2$).
- Stringhe di elementi di $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ formate doppiette e poi triplette...

Lettere e microstati, stringhe e macrostati

- $\mathcal{A}$ è un insieme di lettere. Un insieme (finito) di lettere forma una stringa.
- È utile introdurre una funzione stato che sceglie un elemento in $\mathcal{A}$. Le possibili lettere di un alfabeto costituiscono i possibili microstati.
- Una stringa è formata da tante lettere quindi è formata da tanti microstati.
- Considero l'insieme $\mathcal{A}^L$ di tutte le stringhe di lunghezza L, questo insieme può partizionato ed ogni partizione sarà formata da gruppi di stringhe diverse, ogni elemento della partizione è chiamato macrostato.

Esempio (1)

- $\mathcal{A} = \{T, C\}$, i microstati sono T e C.
- Quali sono le possibili stringhe di lunghezza 2?
- $\mathcal{A}^2 = \{TT, TC, CT, CC\}$
- In quanti partizioni possiamo suddividere $\mathcal{A}^2$?
- Una partizione potrebbe contenere i macrostati:

Macrostati	TT	TC	CT	CC
Probabilità	1/4	1/4	1/4	1/4

- Oppure i macrostati:

Macrostati	TT	{TC,CT}	CC
Probabilità	1/4	2/4	1/4

Esempio (1)

- $\mathcal{A} = \{T, C\}$, i microstati sono T e C.
- Quali sono le possibili stringhe di lunghezza 2?
- $\mathcal{A}^2 = \{TT, TC, CT, CC\}$
- In quanti partizioni possiamo suddividere $\mathcal{A}^2$?
- Una partizione potrebbe contenere i macrostati:

Macrostati	TT	TC	CT	CC
Probabilità	1/4	1/4	1/4	1/4

- Oppure i macrostati:

Macrostati	TT	{TC,CT}	CC
Probabilità	1/4	2/4	1/4

Esempio (1)

- $\mathcal{A} = \{T, C\}$, i microstati sono T e C.
- Quali sono le possibili stringhe di lunghezza 2?
- $\mathcal{A}^2 = \{TT, TC, CT, CC\}$
- In quanti partizioni possiamo suddividere $\mathcal{A}^2$?
- Una partizione potrebbe contenere i macrostati:

Macrostati	TT	TC	CT	CC
Probabilità	1/4	1/4	1/4	1/4

- Oppure i macrostati:

Macrostati	TT	{TC,CT}	CC
Probabilità	1/4	2/4	1/4

Esempio (1)

- $\mathcal{A} = \{T, C\}$, i microstati sono T e C.
- Quali sono le possibili stringhe di lunghezza 2?
- $\mathcal{A}^2 = \{TT, TC, CT, CC\}$
- In quanti partizioni possiamo suddividere $\mathcal{A}^2$?
- Una partizione potrebbe contenere i macrostati:

Macrostati	TT	TC	CT	CC
Probabilità	1/4	1/4	1/4	1/4

- Oppure i macrostati:

Macrostati	TT	{TC,CT}	CC
Probabilità	1/4	2/4	1/4

Esempio (1)

- $\mathcal{A} = \{T, C\}$, i microstati sono T e C.
- Quali sono le possibili stringhe di lunghezza 2?
- $\mathcal{A}^2 = \{TT, TC, CT, CC\}$
- In quanti partizioni possiamo suddividere $\mathcal{A}^2$?
- Una partizione potrebbe contenere i macrostati:

Macrostati	TT	TC	CT	CC
Probabilità	1/4	1/4	1/4	1/4

- Oppure i macrostati:

Macrostati	TT	{TC,CT}	CC
Probabilità	1/4	2/4	1/4

Esempio (1)

- $\mathcal{A} = \{T, C\}$, i microstati sono T e C.
- Quali sono le possibili stringhe di lunghezza 2?
- $\mathcal{A}^2 = \{TT, TC, CT, CC\}$
- In quanti partizioni possiamo suddividere $\mathcal{A}^2$?
- Una partizione potrebbe contenere i macrostati:

Macrostati	TT	TC	CT	CC
Probabilità	1/4	1/4	1/4	1/4

- Oppure i macrostati:

Macrostati	TT	{TC,CT}	CC
Probabilità	1/4	2/4	1/4

Esempio (1)

- $\mathcal{A} = \{T, C\}$, i microstati sono T e C.
- Quali sono le possibili stringhe di lunghezza 2?
- $\mathcal{A}^2 = \{TT, TC, CT, CC\}$
- In quanti partizioni possiamo suddividere $\mathcal{A}^2$?
- Una partizione potrebbe contenere i macrostati:

Macrostati	TT	TC	CT	CC
Probabilità	1/4	1/4	1/4	1/4

- Oppure i macrostati:

Macrostati	TT	{TC,CT}	CC
Probabilità	1/4	2/4	1/4

Esempio (2)

- $\mathcal{A} = \{1, 0\}$, i microstati sono 1 e 0.
- Quali sono le possibili stringhe di lunghezza 3?
- $\mathcal{A}^3 = \{000, 100, 010, 001, 110, 101, 011, 111\}$
- In quanti partizioni possiamo suddividere $\mathcal{A}^3$?
- Una partizione potrebbe contenere i macrostati:

Macrostati	000	{100,010,001}	{110,011,101}	111
Probabilità	1/8	3/8	3/8	1/8

Esempio (2)

- $\mathcal{A} = \{1, 0\}$, i microstati sono 1 e 0.
- Quali sono le possibili stringhe di lunghezza 3?
- $\mathcal{A}^3 = \{000, 100, 010, 001, 110, 101, 011, 111\}$
- In quanti partizioni possiamo suddividere $\mathcal{A}^3$?
- Una partizione potrebbe contenere i macrostati:

Macrostati	000	{100,010,001}	{110,011,101}	111
Probabilità	1/8	3/8	3/8	1/8

Esempio (2)

- $\mathcal{A} = \{1, 0\}$, i microstati sono 1 e 0.
- Quali sono le possibili stringhe di lunghezza 3?
- $\mathcal{A}^3 = \{000, 100, 010, 001, 110, 101, 011, 111\}$
- In quanti partizioni possiamo suddividere $\mathcal{A}^3$?
- Una partizione potrebbe contenere i macrostati:

Macrostati	000	{100,010,001}	{110,011,101}	111
Probabilità	1/8	3/8	3/8	1/8

Esempio (2)

- $\mathcal{A} = \{1, 0\}$, i microstati sono 1 e 0.
- Quali sono le possibili stringhe di lunghezza 3?
- $\mathcal{A}^3 = \{000, 100, 010, 001, 110, 101, 011, 111\}$
- In quanti partizioni possiamo suddividere $\mathcal{A}^3$?
- Una partizione potrebbe contenere i macrostati:

Macrostati	000	{100,010,001}	{110,011,101}	111
Probabilità	1/8	3/8	3/8	1/8

Esempio (2)

- $\mathcal{A} = \{1, 0\}$, i microstati sono 1 e 0.
- Quali sono le possibili stringhe di lunghezza 3?
- $\mathcal{A}^3 = \{000, 100, 010, 001, 110, 101, 011, 111\}$
- In quanti partizioni possiamo suddividere $\mathcal{A}^3$?
- Una partizione potrebbe contenere i macrostati:

Macrostati	000	{100,010,001}	{110,011,101}	111
Probabilità	1/8	3/8	3/8	1/8

Esempio (2)

- $\mathcal{A} = \{1, 0\}$, i microstati sono 1 e 0.
- Quali sono le possibili stringhe di lunghezza 3?
- $\mathcal{A}^3 = \{000, 100, 010, 001, 110, 101, 011, 111\}$
- In quanti partizioni possiamo suddividere $\mathcal{A}^3$?
- Una partizione potrebbe contenere i macrostati:

Macrostati	000	{100,010,001}	{110,011,101}	111
Probabilità	1/8	3/8	3/8	1/8

Microstati e macrostati in fisica

- $\mathcal{A}$ è un insieme degli atomi in una stanza. Un tale sistema avrebbe uno stato definito in meccanica classica specificando per ogni atomo la sua posizione e velocità. Questo è un microstato. Pensate in una mole ci sono circa $N_A \simeq 10^{23}$ particelle!!!
- In effetti in fisica, si mostra che le proprietà di N_A particelle sono definite conoscendo solo sottoinsiemi formati da moltissimi microstati. Gli elementi di una partizione dell'insieme dei microstati è detto macrostato.
- Se si fissa l'energia E di un sistema, si fissano anche tutti i possibili microstati di un sistema compatibili con E.
- Un macrostato è invece definito dalle grandezze macroscopiche come P, V e T, ed è formato dell'insieme di tutti i possibili microstati compatibili.

Microstati e macrostati in fisica

- $\mathcal{A}$ è un insieme degli atomi in una stanza. Un tale sistema avrebbe uno stato definito in meccanica classica specificando per ogni atomo la sua posizione e velocità. Questo è un microstato. Pensate in una mole ci sono circa $N_A \simeq 10^{23}$ particelle!!!
- In effetti in fisica, si mostra che le proprietà di N_A particelle sono definite conoscendo solo sottoinsiemi formati da moltissimi microstati. Gli elementi di una partizione dell'insieme dei microstati è detto macrostato.
- Se si fissa l'energia E di un sistema, si fissano anche tutti i possibili microstati di un sistema compatibili con E.
- Un macrostato è invece definito dalle grandezze macroscopiche come P, V e T, ed è formato dell'insieme di tutti i possibili microstati compatibili.

Microstati e macrostati in fisica

- $\mathcal{A}$ è un insieme degli atomi in una stanza. Un tale sistema avrebbe uno stato definito in meccanica classica specificando per ogni atomo la sua posizione e velocità. Questo è un microstato. Pensate in una mole ci sono circa $N_A \simeq 10^{23}$ particelle!!!
- In effetti in fisica, si mostra che le proprietà di N_A particelle sono definite conoscendo solo sottoinsiemi formati da moltissimi microstati. Gli elementi di una partizione dell'insieme dei microstati è detto macrostato.
- Se si fissa l'energia E di un sistema, si fissano anche tutti i possibili microstati di un sistema compatibili con E.
- Un macrostato è invece definito dalle grandezze macroscopiche come P, V e T, ed è formato dell'insieme di tutti i possibili microstati compatibili.

Microstati e macrostati in fisica

- $\mathcal{A}$ è un insieme degli atomi in una stanza. Un tale sistema avrebbe uno stato definito in meccanica classica specificando per ogni atomo la sua posizione e velocità. Questo è un microstato. Pensate in una mole ci sono circa $N_A \simeq 10^{23}$ particelle!!!
- In effetti in fisica, si mostra che le proprietà di N_A particelle sono definite conoscendo solo sottoinsiemi formati da moltissimi microstati. Gli elementi di una partizione dell'insieme dei microstati è detto macrostato.
- Se si fissa l'energia E di un sistema, si fissano anche tutti i possibili microstati di un sistema compatibili con E.
- Un macrostato è invece definito dalle grandezze macroscopiche come P, V e T, ed è formato dell'insieme di tutti i possibili microstati compatibili.

Microstati e macrostati in fisica

- $\mathcal{A}$ è un insieme degli atomi in una stanza. Un tale sistema avrebbe uno stato definito in meccanica classica specificando per ogni atomo la sua posizione e velocità. Questo è un microstato. Pensate in una mole ci sono circa $N_A \simeq 10^{23}$ particelle!!!
- In effetti in fisica, si mostra che le proprietà di N_A particelle sono definite conoscendo solo sottoinsiemi formati da moltissimi microstati. Gli elementi di una partizione dell'insieme dei microstati è detto macrostato.
- Se si fissa l'energia E di un sistema, si fissano anche tutti i possibili microstati di un sistema compatibili con E.
- Un macrostato è invece definito dalle grandezze macroscopiche come P, V e T, ed è formato dell'insieme di tutti i possibili microstati compatibili.

Storia dell'entropia: L.Boltzmann

Figura 1: **L. Boltzamnn (1844 - 1906)**

Dalla meccanica classica alla termodinamica. A fissata energia E tutti i microstati compatibili sono contati da una funzione $\Omega(E)$:

$$S(E) = k_B \ln \Omega(E).$$

Storia dell'entropia: J.W. Gibbs

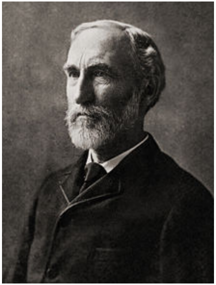


Figura 2: **J.W. Gibbs (1839 - 1903)**

Generalizza la definizione di entropia. Un macrostato s è subordinata alla relalizzazione di k eventi con probabilità $p_1, ..., p_k$:

$$H_G(s) = k_B \sum_{i=1}^{k} p_i \ln \left(\frac{1}{p_i} \right).$$

Storia dell'entropia: C. Shannon

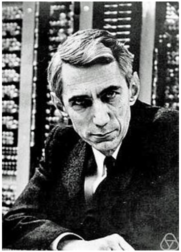


Figura 3: **C. Shannon (1916 - 2001)**

$x_i \in s$, x_i ha probabilità p_i in s, l'informazione è $I(x_i) = \log_2(1/p_i)$ in *bit*. L'entropia di s

$$H_S(s) = \sum_{i=1}^{k} p_i \log_2\left(\frac{1}{p_i}\right).$$

Calcolo dell'entropia di Shannon in $\mathcal{A}^2$

- $\mathcal{A} = \{T, C\}$, $\mathcal{A}_1^2$:

Macrostati	TT	TC	CT	CC
Probabilità	1/4	1/4	1/4	1/4

- L'informazione:

$$I(TT) = I(TC) = I(CT) = I(CC) = \log_2(4) = 2$$

- L'entropia:

$$H_S(TT) = H_S(TC) = H_S(CT) = H(CC) = \frac{1}{4}\log_2(4) = \frac{1}{2}$$

Calcolo dell'entropia di Shannon in $\mathcal{A}^2$

- $\mathcal{A} = \{T, C\}$, $\mathcal{A}_1^2$:

Macrostati	TT	TC	CT	CC
Probabilità	1/4	1/4	1/4	1/4

- L'informazione:

$$I(TT) = I(TC) = I(CT) = I(CC) = \log_2(4) = 2$$

- L'entropia:

$$H_S(TT) = H_S(TC) = H_S(CT) = H(CC) = \frac{1}{4}\log_2(4) = \frac{1}{2}$$

Calcolo dell'entropia di Shannon in $\mathcal{A}^2$

- $\mathcal{A} = \{T, C\}$, $\mathcal{A}_1^2$:

Macrostati	TT	TC	CT	CC
Probabilità	1/4	1/4	1/4	1/4

- L'informazione:

$$I(TT) = I(TC) = I(CT) = I(CC) = \log_2(4) = 2$$

- L'entropia:

$$H_S(TT) = H_S(TC) = H_S(CT) = H(CC) = \frac{1}{4}\log_2(4) = \frac{1}{2}$$

Calcolo dell'entropia di Shannon in $\mathcal{A}^2$

- $\mathcal{A} = \{T, C\}$, $\mathcal{A}_2^2$:

Macrostati	TT	{TC,CT}	CC
Probabilità	1/4	2/4	1/4

- L'informazione:

$$I(TT) = I(CC) = \log_2(4) = 2, \quad I(\{TC, CT\}) = \log_2(2) = 1$$

- L'entropia:

$$H_S(TT) = H_S(CC) = \frac{1}{4}\log_2(4) = \frac{1}{2}, \quad H_S(\{TC, CT\}) = \frac{1}{2}\log_2(2)$$

Calcolo dell'entropia di Shannon in $\mathcal{A}^2$

- $\mathcal{A} = \{T, C\}$, $\mathcal{A}_2^2$:

Macrostati	TT	{TC,CT}	CC
Probabilità	1/4	2/4	1/4

- L'informazione:

$$I(TT) = I(CC) = \log_2(4) = 2, \quad I(\{TC, CT\}) = \log_2(2) = 1$$

- L'entropia:

$$H_S(TT) = H_S(CC) = \frac{1}{4}\log_2(4) = \frac{1}{2}, \quad H_S(\{TC, CT\}) = \frac{1}{2}\log_2(2)$$

Calcolo dell'entropia di Shannon in $\mathcal{A}^2$

- $\mathcal{A} = \{T, C\}$, $\mathcal{A}_2^2$:

Macrostati	TT	{TC,CT}	CC
Probabilità	1/4	2/4	1/4

- L'informazione:

$$I(TT) = I(CC) = \log_2(4) = 2, \quad I(\{TC, CT\}) = \log_2(2) = 1$$

- L'entropia:

$$H_S(TT) = H_S(CC) = \frac{1}{4}\log_2(4) = \frac{1}{2}, \quad H_S(\{TC, CT\}) = \frac{1}{2}\log_2(2)$$

Calcolo dell'entropia di Shannon in $\mathcal{A}^3$

- $\mathcal{A} = \{1, 0\}$, $\mathcal{A}^3$:

Macrostati	000	{100,010,001}	{110,011,101}	111
Probabilità	1/8	3/8	3/8	1/8

- L'informazione:

$$I(000) = I(111) = \log_2(8) = 3,$$

$$I(\{100, 010, 001\}) = I(\{110, 011, 101\}) = \log_2(8/3)$$

- L'entropia:

$$H_S(TT) = H_S(CC) = \frac{1}{8}\log_2(8) = \frac{3}{8},$$

$$H_S(\{100, 010, 001\}) = H_S(\{110, 011, 101\}) = \frac{3}{8}\log_2(8/3).$$

Calcolo dell'entropia di Shannon in $\mathcal{A}^3$

- $\mathcal{A} = \{1, 0\}$, $\mathcal{A}^3$:

Macrostati	000	{100,010,001}	{110,011,101}	111
Probabilità	1/8	3/8	3/8	1/8

- L'informazione:

$$I(000) = I(111) = \log_2(8) = 3,$$

$$I(\{100, 010, 001\}) = I(\{110, 011, 101\}) = \log_2(8/3)$$

- L'entropia:

$$H_S(TT) = H_S(CC) = \frac{1}{8}\log_2(8) = \frac{3}{8},$$

$$H_S(\{100, 010, 001\}) = H_S(\{110, 011, 101\}) = \frac{3}{8}\log_2(8/3).$$

Calcolo dell'entropia di Shannon in $\mathcal{A}^3$

- $\mathcal{A} = \{1, 0\}$, $\mathcal{A}^3$:

Macrostati	000	{100,010,001}	{110,011,101}	111
Probabilità	1/8	3/8	3/8	1/8

- L'informazione:

$$I(000) = I(111) = \log_2(8) = 3,$$

$$I(\{100, 010, 001\}) = I(\{110, 011, 101\}) = \log_2(8/3)$$

- L'entropia:

$$H_S(TT) = H_S(CC) = \frac{1}{8}\log_2(8) = \frac{3}{8},$$

$$H_S(\{100, 010, 001\}) = H_S(\{110, 011, 101\}) = \frac{3}{8}\log_2(8/3).$$

Caccia al sottomarino

La tabella che segue è un classico schema per la *battaglia navale* che contiene un solo sommergibile da colpire, ad esempio posto in $(5, 4)$.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2								
3								
4					S			
5								
6								
7								
8								

Caccia al sottomarino

	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								

Caccia al sottomarino

Quanta informazione è contenuta nello schema della *caccia al sottomarino*?

Caccia al sottomarino

- Qual è la probabilità di colpire al primo colpo il sommergibile?
- Quanta informazione si otterrebbe?
- Si immagini di colpirlo dopo 1 o 2 o 63 colpi mancati come cambierebbe l'informazione ad ogni passo?
- $p_c = 1/64$ e $p_{nc} = 63/64$. Colpire subito significarebbe poter ricostruire tutta la tabella.
- $I = log_2(64) = 6$ bit
- Ad ogni colpo l'informazione cambia, poichè la probabilità di trovare il sommergibile cambia. Se per esempio si eseguono 33 colpi mancati si ottiene un'informazione pari a:

$$I = \log_2(64/63) + \log_2(63/62) + \ldots + \log_2(33/32) = 1 \text{ bit}.$$

Ma se fosse colpito dopo 34 tiri: $I = 1 + \log_2(32/1) = 6$ bit, ritroveremmo tutta l'informazione.

Caccia al sottomarino

- Qual è la probabilità di colpire al primo colpo il sommergibile?
- Quanta informazione si otterrebbe?
- Si immagini di colpirlo dopo 1 o 2 o 63 colpi mancati come cambierebbe l'informazione ad ogni passo?
- $p_c = 1/64$ e $p_{nc} = 63/64$. Colpire subito significarebbe poter ricostruire tutta la tabella.
- $I = log_2(64) = 6$ bit
- Ad ogni colpo l'informazione cambia, poichè la probabilità di trovare il sommergibile cambia. Se per esempio si eseguono 33 colpi mancati si ottiene un'informazione pari a:

$$I = \log_2(64/63) + \log_2(63/62) + \ldots + \log_2(33/32) = 1 \text{ bit}.$$

Ma se fosse colpito dopo 34 tiri: $I = 1 + \log_2(32/1) = 6$ bit, ritroveremmo tutta l'informazione.

Caccia al sottomarino

- Qual è la probabilità di colpire al primo colpo il sommergibile?
- Quanta informazione si otterrebbe?
- Si immagini di colpirlo dopo 1 o 2 o 63 colpi mancati come cambierebbe l'informazione ad ogni passo?
- $p_c = 1/64$ e $p_{nc} = 63/64$. Colpire subito significarebbe poter ricostruire tutta la tabella.
- $I = log_2(64) = 6$ bit
- Ad ogni colpo l'informazione cambia, poichè la probabilità di trovare il sommergibile cambia. Se per esempio si eseguono 33 colpi mancati si ottiene un'informazione pari a:

$$I = \log_2(64/63) + \log_2(63/62) + \ldots + \log_2(33/32) = 1 \text{ bit.}$$

Ma se fosse colpito dopo 34 tiri: $I = 1 + \log_2(32/1) = 6$ bit, ritroveremmo tutta l'informazione.

Caccia al sottomarino

- Qual è la probabilità di colpire al primo colpo il sommergibile?
- Quanta informazione si otterrebbe?
- Si immagini di colpirlo dopo 1 o 2 o 63 colpi mancati come cambierebbe l'informazione ad ogni passo?
- $p_c = 1/64$ e $p_{nc} = 63/64$. Colpire subito significarebbe poter ricostruire tutta la tabella.
- $I = log_2(64) = 6$ bit
- Ad ogni colpo l'informazione cambia, poichè la probabilità di trovare il sommergibile cambia. Se per esempio si eseguono 33 colpi mancati si ottiene un'informazione pari a:

$$I = \log_2(64/63) + \log_2(63/62) + \ldots + \log_2(33/32) = 1 \text{ bit.}$$

Ma se fosse colpito dopo 34 tiri: $I = 1 + \log_2(32/1) = 6$ bit, ritroveremmo tutta l'informazione.

Caccia al sottomarino

- Qual è la probabilità di colpire al primo colpo il sommergibile?
- Quanta informazione si otterrebbe?
- Si immagini di colpirlo dopo 1 o 2 o 63 colpi mancati come cambierebbe l'informazione ad ogni passo?
- $p_c = 1/64$ e $p_{nc} = 63/64$. Colpire subito significarebbe poter ricostruire tutta la tabella.
- $I = log_2(64) = 6$ bit
- Ad ogni colpo l'informazione cambia, poichè la probabilità di trovare il sommergibile cambia. Se per esempio si eseguono 33 colpi mancati si ottiene un'informazione pari a:

$$I = \log_2(64/63) + \log_2(63/62) + \ldots + \log_2(33/32) = 1 \text{ bit.}$$

Ma se fosse colpito dopo 34 tiri: $I = 1 + \log_2(32/1) = 6$ bit, ritroveremmo tutta l'informazione.

Caccia al sottomarino

- Qual è la probabilità di colpire al primo colpo il sommergibile?
- Quanta informazione si otterrebbe?
- Si immagini di colpirlo dopo 1 o 2 o 63 colpi mancati come cambierebbe l'informazione ad ogni passo?
- $p_c = 1/64$ e $p_{nc} = 63/64$. Colpire subito significarebbe poter ricostruire tutta la tabella.
- $I = log_2(64) = 6$ bit
- Ad ogni colpo l'informazione cambia, poichè la probabilità di trovare il sommergibile cambia. Se per esempio si eseguono 33 colpi mancati si ottiene un'informazione pari a:

$$I = \log_2(64/63) + \log_2(63/62) + \ldots + \log_2(33/32) = 1 \text{ bit.}$$

Ma se fosse colpito dopo 34 tiri: $I = 1 + \log_2(32/1) = 6$ bit, ritroveremmo tutta l'informazione.

Caccia al sottomarino

- Qual è la probabilità di colpire al primo colpo il sommergibile?
- Quanta informazione si otterrebbe?
- Si immagini di colpirlo dopo 1 o 2 o 63 colpi mancati come cambierebbe l'informazione ad ogni passo?
- $p_c = 1/64$ e $p_{nc} = 63/64$. Colpire subito significarebbe poter ricostruire tutta la tabella.
- $I = log_2(64) = 6$ bit
- Ad ogni colpo l'informazione cambia, poichè la probabilità di trovare il sommergibile cambia. Se per esempio si eseguono 33 colpi mancati si ottiene un'informazione pari a:

$$I = \log_2(64/63) + \log_2(63/62) + \ldots + \log_2(33/32) = 1 \text{ bit}.$$

Ma se fosse colpito dopo 34 tiri: $I = 1 + \log_2(32/1) = 6$ bit, ritroveremmo tutta l'informazione.

Codifica di un messaggio

- Quante sono le lettere ed i simboli che ci permettono di scrivere in italiano?
- Se tu volessi usare $\{0, 1\}$ per codificare tali simboli, quanto dovranno essere lunghe le stringhe di 0 e 1?
- In un testo scritto in italiano, è vero che tutte le lettere capitano con la stessa frequenza?

Codifica di un messaggio

- Quante sono le lettere ed i simboli che ci permettono di scrivere in italiano?
- Se tu volessi usare $\{0, 1\}$ per codificare tali simboli, quanto dovranno essere lunghe le stringhe di 0 e 1?
- In un testo scritto in italiano, è vero che tutte le lettere capitano con la stessa frequenza?

Codifica di un messaggio

- Quante sono le lettere ed i simboli che ci permettono di scrivere in italiano?
- Se tu volessi usare $\{0, 1\}$ per codificare tali simboli, quanto dovranno essere lunghe le stringhe di 0 e 1?
- In un testo scritto in italiano, è vero che tutte le lettere capitano con la stessa frequenza?

Codifica di un messaggio

- Quante sono le lettere ed i simboli che ci permettono di scrivere in italiano?
- Se tu volessi usare $\{0, 1\}$ per codificare tali simboli, quanto dovranno essere lunghe le stringhe di 0 e 1?
- In un testo scritto in italiano, è vero che tutte le lettere capitano con la stessa frequenza?

La compressione

- I metodi di compressione dell'informazione: rappresentano i dati riducendo le ridondanze e rappresentare la stessa informazione con un numero inferiore di bit.
- Indichiamo con $\mathcal{A}$ un alfabeto. È possibile rappresentare un $x \in \mathcal{A}$ con un numero di bit inferiori a quelli necessari in $\mathcal{A}$?
- Far lavorare gli studenti su esempi semplici con alfabeti A con poche lettere.
- Risposta: No. Se questo fosse possibile vorrebbe dire che esisterebbe lunghezza l tale che

$$l < \log_2(|\mathcal{A}|)$$

e quindi $2^l < |\mathcal{A}|$. Questo comporterebbe che la rappresentazione non sarebbe iniettiva.
- Come funzionano allora gli algoritmi con i quali usualmente sono *zippati* i file ?

La compressione

- I metodi di compressione dell'informazione: rappresentano i dati riducendo le ridondanze e rappresentare la stessa informazione con un numero inferiore di bit.
- Indichiamo con $\mathcal{A}$ un alfabeto. È possibile rappresentare un $x \in \mathcal{A}$ con un numero di bit inferiori a quelli necessari in $\mathcal{A}$?
- Far lavorare gli studenti su esempi semplici con alfabeti A con poche lettere.
- Risposta: No. Se questo fosse possibile vorrebbe dire che esisterebbe lunghezza l tale che

$$l < \log_2(|\mathcal{A}|)$$

e quindi $2^l < |\mathcal{A}|$. Questo comporterebbe che la rappresentazione non sarebbe iniettiva.

- Come funzionano allora gli algoritmi con i quali usualmente sono *zippati* i file ?

La compressione

- I metodi di compressione dell'informazione: rappresentano i dati riducendo le ridondanze e rappresentare la stessa informazione con un numero inferiore di bit.
- Indichiamo con $\mathcal{A}$ un alfabeto. È possibile rappresentare un $x \in \mathcal{A}$ con un numero di bit inferiori a quelli necessari in $\mathcal{A}$?
- Far lavorare gli studenti su esempi semplici con alfabeti A con poche lettere.
- Risposta: No. Se questo fosse possibile vorrebbe dire che esisterebbe lunghezza l tale che

$$l < \log_2(|\mathcal{A}|)$$

e quindi $2^l < |\mathcal{A}|$. Questo comporterebbe che la rappresentazione non sarebbe iniettiva.
- Come funzionano allora gli algoritmi con i quali usualmente sono *zippati* i file ?

La compressione

- I metodi di compressione dell'informazione: rappresentano i dati riducendo le ridondanze e rappresentare la stessa informazione con un numero inferiore di bit.
- Indichiamo con $\mathcal{A}$ un alfabeto. È possibile rappresentare un $x \in \mathcal{A}$ con un numero di bit inferiori a quelli necessari in $\mathcal{A}$?
- Far lavorare gli studenti su esempi semplici con alfabeti A con poche lettere.
- Risposta: No. Se questo fosse possibile vorrebbe dire che esisterebbe lunghezza l tale che

$$l < \log_2(|\mathcal{A}|)$$

  e quindi $2^l < |\mathcal{A}|$. Questo comporterebbe che la rappresentazione non sarebbe iniettiva.
- Come funzionano allora gli algoritmi con i quali usualmente sono *zippati* i file ?

La compressione

- I metodi di compressione dell'informazione: rappresentano i dati riducendo le ridondanze e rappresentare la stessa informazione con un numero inferiore di bit.
- Indichiamo con $\mathcal{A}$ un alfabeto. È possibile rappresentare un $x \in \mathcal{A}$ con un numero di bit inferiori a quelli necessari in $\mathcal{A}$?
- Far lavorare gli studenti su esempi semplici con alfabeti A con poche lettere.
- Risposta: No. Se questo fosse possibile vorrebbe dire che esisterebbe lunghezza l tale che

$$l < \log_2(|\mathcal{A}|)$$

  e quindi $2^l < |\mathcal{A}|$. Questo comporterebbe che la rappresentazione non sarebbe iniettiva.
- Come funzionano allora gli algoritmi con i quali usualmente sono *zippati* i file ?

La compressione

- I metodi di compressione dell'informazione: rappresentano i dati riducendo le ridondanze e rappresentare la stessa informazione con un numero inferiore di bit.
- Indichiamo con $\mathcal{A}$ un alfabeto. È possibile rappresentare un $x \in \mathcal{A}$ con un numero di bit inferiori a quelli necessari in $\mathcal{A}$?
- Far lavorare gli studenti su esempi semplici con alfabeti A con poche lettere.
- Risposta: No. Se questo fosse possibile vorrebbe dire che esisterebbe lunghezza l tale che
$$l < \log_2(|\mathcal{A}|)$$
e quindi $2^l < |\mathcal{A}|$. Questo comporterebbe che la rappresentazione non sarebbe iniettiva.
- Come funzionano allora gli algoritmi con i quali usualmente sono *zippati* i file ?

Stringhe di lettere

- Consideriamo un alfabeto $\mathcal{A} = \{A, B, C\}$, ed una stringa s:

$$s = AAABCACBABACC.$$

- Con quale frequenza compaiono le varie lettere?
- $f_A = 6/13$, $f_B = 3/13$ e $f_C = 4/13$.
- Quanti *bit* utilizzeresti per codificare le singole lettere di $\mathcal{A}$?
- $log_2|\mathcal{A}| \simeq 2$, quindi 2 *bit*. Si può associare 0 a A, 01 a B e 11 a C
- E quanti *bit* per la stringa s? Ossia quanta informazione in *bit* è contenuta in s?
- Potremmo calcolare la media del numero di *bit* utilizzati:

$$1\,\frac{6}{13} + 2\,\frac{3}{13} + 2\,\frac{4}{13} = \frac{20}{13} = 1,53\ bit$$

Stringhe di lettere

- Consideriamo un alfabeto $\mathcal{A} = \{A, B, C\}$, ed una stringa s:

$$s = AAABCACBABACC.$$

- Con quale frequenza compaiono le varie lettere?
- $f_A = 6/13$, $f_B = 3/13$ e $f_C = 4/13$.
- Quanti *bit* utilizzeresti per codificare le singole lettere di $\mathcal{A}$?
- $log_2|\mathcal{A}| \simeq 2$, quindi 2 *bit*. Si può associare 0 a A, 01 a B e 11 a C
- E quanti *bit* per la stringa s? Ossia quanta informazione in *bit* è contenuta in s?
- Potremmo calcolare la media del numero di *bit* utilizzati:

$$1\,\frac{6}{13} + 2\,\frac{3}{13} + 2\,\frac{4}{13} = \frac{20}{13} = 1,53\,bit$$

Stringhe di lettere

- Consideriamo un alfabeto $\mathcal{A} = \{A, B, C\}$, ed una stringa s:

$$s = AAABCACBABACC.$$

- Con quale frequenza compaiono le varie lettere?
- $f_A = 6/13$, $f_B = 3/13$ e $f_C = 4/13$.
- Quanti *bit* utilizzeresti per codificare le singole lettere di $\mathcal{A}$?
- $log_2|\mathcal{A}| \simeq 2$, quindi 2 *bit*. Si può associare 0 a A, 01 a B e 11 a C
- E quanti *bit* per la stringa s? Ossia quanta informazione in *bit* è contenuta in s?
- Potremmo calcolare la media del numero di *bit* utilizzati:

$$1\frac{6}{13} + 2\frac{3}{13} + 2\frac{4}{13} = \frac{20}{13} = 1,53\,bit$$

Stringhe di lettere

- Consideriamo un alfabeto $\mathcal{A} = \{A, B, C\}$, ed una stringa s:

$$s = AAABCACBABACC.$$

- Con quale frequenza compaiono le varie lettere?
- $f_A = 6/13$, $f_B = 3/13$ e $f_C = 4/13$.
- Quanti *bit* utilizzeresti per codificare le singole lettere di $\mathcal{A}$?
- $log_2|\mathcal{A}| \simeq 2$, quindi 2 *bit*. Si può associare 0 a A, 01 a B e 11 a C
- E quanti *bit* per la stringa s? Ossia quanta informazione in *bit* è contenuta in s?
- Potremmo calcolare la media del numero di *bit* utilizzati:

$$1\,\frac{6}{13} + 2\,\frac{3}{13} + 2\,\frac{4}{13} = \frac{20}{13} = 1,53\,bit$$

Stringhe di lettere

- Consideriamo un alfabeto $\mathcal{A} = \{A, B, C\}$, ed una stringa s:

$$s = AAABCACBABACC.$$

- Con quale frequenza compaiono le varie lettere?
- $f_A = 6/13$, $f_B = 3/13$ e $f_C = 4/13$.
- Quanti *bit* utilizzeresti per codificare le singole lettere di $\mathcal{A}$?
- $log_2 |\mathcal{A}| \simeq 2$, quindi 2 *bit*. Si può associare 0 a A, 01 a B e 11 a C
- E quanti *bit* per la stringa s? Ossia quanta informazione in *bit* è contenuta in s?
- Potremmo calcolare la media del numero di *bit* utilizzati:

$$1\,\frac{6}{13} + 2\,\frac{3}{13} + 2\,\frac{4}{13} = \frac{20}{13} = 1,53\,bit$$

Stringhe di lettere

- Consideriamo un alfabeto $\mathcal{A} = \{A, B, C\}$, ed una stringa s:

$$s = AAABCACBABACC.$$

- Con quale frequenza compaiono le varie lettere?
- $f_A = 6/13$, $f_B = 3/13$ e $f_C = 4/13$.
- Quanti *bit* utilizzeresti per codificare le singole lettere di $\mathcal{A}$?
- $log_2|\mathcal{A}| \simeq 2$, quindi 2 *bit*. Si può associare 0 a A, 01 a B e 11 a C
- E quanti *bit* per la stringa s? Ossia quanta informazione in *bit* è contenuta in s?
- Potremmo calcolare la media del numero di *bit* utilizzati:

$$1\,\frac{6}{13} + 2\,\frac{3}{13} + 2\,\frac{4}{13} = \frac{20}{13} = 1,53\,bit$$

Stringhe di lettere

- Consideriamo un alfabeto $\mathcal{A} = \{A, B, C\}$, ed una stringa s:

$$s = AAABCACBABACC.$$

- Con quale frequenza compaiono le varie lettere?
- $f_A = 6/13$, $f_B = 3/13$ e $f_C = 4/13$.
- Quanti *bit* utilizzeresti per codificare le singole lettere di $\mathcal{A}$?
- $log_2|\mathcal{A}| \simeq 2$, quindi 2 *bit*. Si può associare 0 a A, 01 a B e 11 a C
- E quanti *bit* per la stringa s? Ossia quanta informazione in *bit* è contenuta in s?
- Potremmo calcolare la media del numero di *bit* utilizzati:

$$1\,\frac{6}{13} + 2\,\frac{3}{13} + 2\,\frac{4}{13} = \frac{20}{13} = 1,53\,bit$$

Stringhe di lettere

- Si può generalizzare la formula?

$$1\,\frac{6}{13} + 2\,\frac{3}{13} + 2\,\frac{4}{13} = \frac{20}{13} = 1,53\,bit$$

- Consideriamo un altro esempio sempre con l'alfabeto $\mathcal{A} = \{A, B, C\}$, ma con una stringa s:

$$s = AAABCACBABAC.$$

- Con quale frequenza compaiono le varie lettere?
- $f_A = 6/12$, $f_B = 3/12$ e $f_C = 3/12$.
- Quanti *bit* utilizzeresti per codificare le singole lettere di $\mathcal{A}$?
- $log_2|\mathcal{A}| \simeq 2$, quindi 2 *bit*. Si può associare 0 a A, 01 a B e 11 a C
- Ossia quanta informazione in *bit* è contenuta in s?
- Il numero medio del numero di *bit* utilizzati:

$$1\,\frac{6}{12} + 2\,\frac{3}{12} + 2\,\frac{3}{12} = \frac{18}{12} = 1,50\,bit$$

Stringhe di lettere

- Si può generalizzare la formula?

$$1\,\frac{6}{13} + 2\,\frac{3}{13} + 2\,\frac{4}{13} = \frac{20}{13} = 1,53\,bit$$

- Consideriamo un altro esempio sempre con l'alfabeto $\mathcal{A} = \{A, B, C\}$, ma con una stringa s:

$$s = AAABCACBABAC.$$

- Con quale frequenza compaiono le varie lettere?
- $f_A = 6/12$, $f_B = 3/12$ e $f_C = 3/12$.
- Quanti *bit* utilizzeresti per codificare le singole lettere di $\mathcal{A}$?
- $log_2|\mathcal{A}| \simeq 2$, quindi 2 *bit*. Si può associare 0 a A, 01 a B e 11 a C
- Ossia quanta informazione in *bit* è contenuta in s?
- Il numero medio del numero di *bit* utilizzati:

$$1\,\frac{6}{12} + 2\,\frac{3}{12} + 2\,\frac{3}{12} = \frac{18}{12} = 1,50\,bit$$

Stringhe di lettere

- Si può generalizzare la formula?

$$1\,\frac{6}{13} + 2\,\frac{3}{13} + 2\,\frac{4}{13} = \frac{20}{13} = 1,53\,bit$$

- Consideriamo un altro esempio sempre con l'alfabeto $\mathcal{A} = \{A, B, C\}$, ma con una stringa s:

$$s = AAABCACBABAC.$$

- Con quale frequenza compaiono le varie lettere?
- $f_A = 6/12$, $f_B = 3/12$ e $f_C = 3/12$.
- Quanti *bit* utilizzeresti per codificare le singole lettere di $\mathcal{A}$?
- $log_2|\mathcal{A}| \simeq 2$, quindi $2\,bit$. Si può associare 0 a A, 01 a B e 11 a C
- Ossia quanta informazione in *bit* è contenuta in s?
- Il numero medio del numero di *bit* utilizzati:

$$1\,\frac{6}{12} + 2\,\frac{3}{12} + 2\,\frac{3}{12} = \frac{18}{12} = 1,50\,bit$$

Stringhe di lettere

- Si può generalizzare la formula?

$$1\,\frac{6}{13} + 2\,\frac{3}{13} + 2\,\frac{4}{13} = \frac{20}{13} = 1,53\,bit$$

- Consideriamo un altro esempio sempre con l'alfabeto $\mathcal{A} = \{A, B, C\}$, ma con una stringa s:

$$s = AAABCACBABAC.$$

- Con quale frequenza compaiono le varie lettere?
- $f_A = 6/12$, $f_B = 3/12$ e $f_C = 3/12$.
- Quanti *bit* utilizzeresti per codificare le singole lettere di $\mathcal{A}$?
- $log_2|\mathcal{A}| \simeq 2$, quindi 2 *bit*. Si può associare 0 a A, 01 a B e 11 a C
- Ossia quanta informazione in *bit* è contenuta in s?
- Il numero medio del numero di *bit* utilizzati:

$$1\,\frac{6}{12} + 2\,\frac{3}{12} + 2\,\frac{3}{12} = \frac{18}{12} = 1,50\,bit$$

Stringhe di lettere

- Si può generalizzare la formula?

$$1\,\frac{6}{13} + 2\,\frac{3}{13} + 2\,\frac{4}{13} = \frac{20}{13} = 1,53\,bit$$

- Consideriamo un altro esempio sempre con l'alfabeto $\mathcal{A} = \{A, B, C\}$, ma con una stringa s:

$$s = AAABCACBABAC.$$

- Con quale frequenza compaiono le varie lettere?
- $f_A = 6/12$, $f_B = 3/12$ e $f_C = 3/12$.
- Quanti *bit* utilizzeresti per codificare le singole lettere di $\mathcal{A}$?
- $log_2|\mathcal{A}| \simeq 2$, quindi 2 *bit*. Si può associare 0 a A, 01 a B e 11 a C
- Ossia quanta informazione in *bit* è contenuta in s?
- Il numero medio del numero di *bit* utilizzati:

$$1\,\frac{6}{12} + 2\,\frac{3}{12} + 2\,\frac{3}{12} = \frac{18}{12} = 1,50\,bit$$

Stringhe di lettere

- Si può generalizzare la formula?

$$1\,\frac{6}{13}+2\,\frac{3}{13}+2\,\frac{4}{13}=\frac{20}{13}=1,53\,bit$$

- Consideriamo un altro esempio sempre con l'alfabeto $\mathcal{A}=\{A,B,C\}$, ma con una stringa s:

$$s = AAABCACBABAC.$$

- Con quale frequenza compaiono le varie lettere?
- $f_A = 6/12$, $f_B = 3/12$ e $f_C = 3/12$.
- Quanti *bit* utilizzeresti per codificare le singole lettere di $\mathcal{A}$?
- $log_2|\mathcal{A}| \simeq 2$, quindi $2\,bit$. Si può associare 0 a A, 01 a B e 11 a C
- Ossia quanta informazione in *bit* è contenuta in s?
- Il numero medio del numero di *bit* utilizzati:

$$1\,\frac{6}{12}+2\,\frac{3}{12}+2\,\frac{3}{12}=\frac{18}{12}=1,50\,bit$$

Stringhe di lettere

- Si può generalizzare la formula?

$$1\,\frac{6}{13} + 2\,\frac{3}{13} + 2\,\frac{4}{13} = \frac{20}{13} = 1,53\,\mathit{bit}$$

- Consideriamo un altro esempio sempre con l'alfabeto $\mathcal{A} = \{A, B, C\}$, ma con una stringa s:

$$s = AAABCACBABAC.$$

- Con quale frequenza compaiono le varie lettere?
- $f_A = 6/12$, $f_B = 3/12$ e $f_C = 3/12$.
- Quanti *bit* utilizzeresti per codificare le singole lettere di $\mathcal{A}$?
- $log_2|\mathcal{A}| \simeq 2$, quindi $2\,\mathit{bit}$. Si può associare 0 a A, 01 a B e 11 a C
- Ossia quanta informazione in *bit* è contenuta in s?
- Il numero medio del numero di *bit* utilizzati:

$$1\,\frac{6}{12} + 2\,\frac{3}{12} + 2\,\frac{3}{12} = \frac{18}{12} = 1,50\,\mathit{bit}$$

A caccia di una formula...

- Ora la formula

$$1\,\frac{6}{12} + 2\,\frac{3}{12} + 2\,\frac{3}{12} = \frac{18}{12} = 1,50\ \mathit{bit}$$

può suggerire una sua generalizzazione...

- $$1\,\frac{1}{2} + 2\,\frac{1}{4} + 2\,\frac{1}{4} = \frac{6}{4} = 1,50\ \mathit{bit}$$

- Ricordiamo che l'informazione può essere valutata con

$$\log_2(1/p) = -\log_2(p)$$

E allora...

- $$-\frac{1}{2}\log_2(2) - \frac{1}{4}\log_2(4) - \frac{1}{4}\log_2(4) = 1,5\ \mathit{bit}$$

A caccia di una formula...

- Ora la formula

$$1\,\frac{6}{12}+2\,\frac{3}{12}+2\,\frac{3}{12}=\frac{18}{12}=1,50\;bit$$

  può suggerire una sua generalizzazione...

- $$1\,\frac{1}{2}+2\,\frac{1}{4}+2\,\frac{1}{4}=\frac{6}{4}=1,50\;bit$$

- Ricordiamo che l'informazione può essere valutata con

$$\log_2(1/p)=-\log_2(p)$$

  E allora...

- $$-\frac{1}{2}\,\log_2(2)-\frac{1}{4}\,\log_2(4)-\frac{1}{4}\,\log_2(4)=1,5\;bit$$

A caccia di una formula...

- Ora la formula

$$1\,\frac{6}{12} + 2\,\frac{3}{12} + 2\,\frac{3}{12} = \frac{18}{12} = 1,50\ \mathit{bit}$$

  può suggerire una sua generalizzazione...

- $$1\,\frac{1}{2} + 2\,\frac{1}{4} + 2\,\frac{1}{4} = \frac{6}{4} = 1,50\ \mathit{bit}$$

- Ricordiamo che l'informazione può essere valutata con

$$\log_2(1/p) = -\log_2(p)$$

  E allora...

- $$-\frac{1}{2}\,\log_2(2) - \frac{1}{4}\,\log_2(4) - \frac{1}{4}\,\log_2(4) = 1,5\ \mathit{bit}$$

A caccia di una formula...

- Ora la formula

$$1\,\frac{6}{12}+2\,\frac{3}{12}+2\,\frac{3}{12}=\frac{18}{12}=1,50\ \mathit{bit}$$

può suggerire una sua generalizzazione...

- $$1\,\frac{1}{2}+2\,\frac{1}{4}+2\,\frac{1}{4}=\frac{6}{4}=1,50\ \mathit{bit}$$

- Ricordiamo che l'informazione può essere valutata con

$$\log_2(1/p)=-\log_2(p)$$

E allora...

- $$-\frac{1}{2}\,\log_2(2)-\frac{1}{4}\,\log_2(4)-\frac{1}{4}\,\log_2(4)=1,5\ \mathit{bit}$$

A caccia di una formula...

- La formula

$$-\frac{1}{2}\log_2(2) - \frac{1}{4}\log_2(4) - \frac{1}{4}\log_2(4) = 1,5\,\mathit{bit}$$

  si può interpretare come:

- $$-f_A \log_2(1/f_A) - f_B \log_2(1/f_B) - f_C \log_2(1/f_C)$$

A caccia di una formula...

- La formula

$$-\frac{1}{2}\,\log_2(2) - \frac{1}{4}\,\log_2(4) - \frac{1}{4}\,\log_2(4) = 1,5\,\mathit{bit}$$

  si può interpretare come:

- $$-f_A\,\log_2(1/f_A) - f_B\,\log_2(1/f_B) - f_C\,\log_2(1/f_C)$$

A caccia di una formula...

- La formula

$$-\frac{1}{2}\log_2(2) - \frac{1}{4}\log_2(4) - \frac{1}{4}\log_2(4) = 1,5\,bit$$

  si può interpretare come:

-

$$-f_A \log_2(1/f_A) - f_B \log_2(1/f_B) - f_C \log_2(1/f_C)$$

Entropia di Shannon e stringhe tipiche

Consideriamo alfabeto $\mathcal{A} = \{x_1, ..., x_a\}$ ed una lingua in cui ciascun x_i compare con una probabilità caratteristica p_i.
Prendiamo s è una stringa di lunghezza N di elemeti di $\mathcal{A}$:

- Quante volte potrà capitare x_i in s?
- Ci asppettiano un numero pari a Np_i.
- Quale sarà quindi la probabilità di avere la stringa s?
- La scelta delle lettere possiamo assumerla una collezione di eventi indipendenti: $p(s) = p_1^{Np_1}\, p_2^{Np_2} \dots p_a^{Np_a}$.
- Quanta informazione conterrà s?
- $I(s) = 1/\log_2(P(s)) = -\log_2(P(s)) = -N\sum_{i=1}^{a} p_i \log_2(p_i)$. L'espressione $H_S(p_1, ..., p_a) = -\sum_{i=1}^{a} p_i \log_2(p_i)$ è detta entropia di Shannon.

Entropia di Shannon e stringhe tipiche

Consideriamo alfabeto $\mathcal{A} = \{x_1, ..., x_a\}$ ed una lingua in cui ciascun x_i compare con una probabilità caratteristica p_i.
Prendiamo s è una stringa di lunghezza N di elemeti di $\mathcal{A}$:

- Quante volte potrà capitare x_i in s?
- Ci asppettiano un numero pari a Np_i.
- Quale sarà quindi la probabilità di avere la stringa s?
- La scelta delle lettere possiamo assumerla una collezione di eventi indipendenti: $p(s) = p_1^{Np_1} \, p_2^{Np_2} \ldots p_a^{Np_a}$.
- Quanta informazione conterrà s?
- $I(s) = 1/\log_2(P(s)) = -\log_2(P(s)) = -N \sum_{i=1}^{a} p_i \log_2(p_i)$. L'espressione $H_S(p_1, ..., p_a) = -\sum_{i=1}^{a} p_i \log_2(p_i)$ è detta entropia di Shannon.

Entropia di Shannon e stringhe tipiche

Consideriamo alfabeto $\mathcal{A} = \{x_1, ..., x_a\}$ ed una lingua in cui ciascun x_i compare con una probabilità caratteristica p_i.
Prendiamo s è una stringa di lunghezza N di elemeti di $\mathcal{A}$:

- Quante volte potrà capitare x_i in s?
- Ci asppettiano un numero pari a Np_i.
- Quale sarà quindi la probabilità di avere la stringa s?
- La scelta delle lettere possiamo assumerla una collezione di eventi indipendenti: $p(s) = p_1^{Np_1}\, p_2^{Np_2} ... p_a^{Np_a}$.
- Quanta informazione conterrà s?
- $I(s) = 1/\log_2(P(s)) = -\log_2(P(s)) = -N\sum_{i=1}^{a} p_i \log_2(p_i)$. L'espressione $H_S(p_1, ..., p_a) = -\sum_{i=1}^{a} p_i \log_2(p_i)$ è detta entropia di Shannon.

Entropia di Shannon e stringhe tipiche

Consideriamo alfabeto $\mathcal{A} = \{x_1, ..., x_a\}$ ed una lingua in cui ciascun x_i compare con una probabilità caratteristica p_i.
Prendiamo s è una stringa di lunghezza N di elemeti di $\mathcal{A}$:

- Quante volte potrà capitare x_i in s?
- Ci asppettiano un numero pari a Np_i.
- Quale sarà quindi la probabilità di avere la stringa s?
- La scelta delle lettere possiamo assumerla una collezione di eventi indipendenti: $p(s) = p_1^{Np_1} \, p_2^{Np_2} ... p_a^{Np_a}$.
- Quanta informazione conterrà s?
- $I(s) = 1/\log_2(P(s)) = -\log_2(P(s)) = -N \sum_{i=1}^{a} p_i \log_2(p_i)$. L'espressione $H_S(p_1, ..., p_a) = -\sum_{i=1}^{a} p_i \log_2(p_i)$ è detta entropia di Shannon.

Entropia di Shannon e stringhe tipiche

Consideriamo alfabeto $\mathcal{A} = \{x_1, ..., x_a\}$ ed una lingua in cui ciascun x_i compare con una probabilità caratteristica p_i.
Prendiamo s è una stringa di lunghezza N di elemeti di $\mathcal{A}$:

- Quante volte potrà capitare x_i in s?
- Ci asppettiano un numero pari a Np_i.
- Quale sarà quindi la probabilità di avere la stringa s?
- La scelta delle lettere possiamo assumerla una collezione di eventi indipendenti: $p(s) = p_1^{Np_1}\, p_2^{Np_2} ... p_a^{Np_a}$.
- Quanta informazione conterrà s?
- $I(s) = 1/\log_2(P(s)) = -\log_2(P(s)) = -N\sum_{i=1}^{a} p_i \log_2(p_i)$. L'espressione $H_S(p_1, .., p_a) = -\sum_{i=1}^{a} p_i \log_2(p_i)$ è detta entropia di Shannon.

Entropia di Shannon e stringhe tipiche

Consideriamo alfabeto $\mathcal{A} = \{x_1, ..., x_a\}$ ed una lingua in cui ciascun x_i compare con una probabilità caratteristica p_i.
Prendiamo s è una stringa di lunghezza N di elemeti di $\mathcal{A}$:

- Quante volte potrà capitare x_i in s?
- Ci asppettiano un numero pari a Np_i.
- Quale sarà quindi la probabilità di avere la stringa s?
- La scelta delle lettere possiamo assumerla una collezione di eventi indipendenti: $p(s) = p_1^{Np_1}\, p_2^{Np_2} ... p_a^{Np_a}$.
- Quanta informazione conterrà s?
- $I(s) = 1/\log_2(P(s)) = -\log_2(P(s)) = -N\sum_{i=1}^{a} p_i \log_2(p_i)$. L'espressione $H_S(p_1, .., p_a) = -\sum_{i=1}^{a} p_i \log_2(p_i)$ è detta entropia di Shannon.

Entropia di Shannon e stringhe tipiche

Consideriamo alfabeto $\mathcal{A} = \{x_1, ..., x_a\}$ ed una lingua in cui ciascun x_i compare con una probabilità caratteristica p_i.
Prendiamo s è una stringa di lunghezza N di elemeti di $\mathcal{A}$:

- Quante volte potrà capitare x_i in s?
- Ci asppettiano un numero pari a Np_i.
- Quale sarà quindi la probabilità di avere la stringa s?
- La scelta delle lettere possiamo assumerla una collezione di eventi indipendenti: $p(s) = p_1^{Np_1}\, p_2^{Np_2} ... p_a^{Np_a}$.
- Quanta informazione conterrà s?
- $I(s) = 1/\log_2(P(s)) = -\log_2(P(s)) = -N\sum_{i=1}^{a} p_i \log_2(p_i)$. L'espressione $H_S(p_1, .., p_a) = -\sum_{i=1}^{a} p_i \log_2(p_i)$ è detta entropia di Shannon.

Proprietà dell'entropia di Shannon

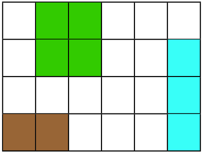
L'entropia di Shannon permette di valutare il minimo del numero medio di *bit* che occorrono per codificare una stringa.

Ordine e disordine: l'entropia di Gibbs

- Immagina la tua scrivania o la tua stanza: certamente ci sono un certo numero N d'oggetti che arredano la stanza e che sono tuo uso comune. Questi oggetti possono evidentemente essere disposti in altrettante posizioni.
- Se tu assumessi di poterli disporre a tuo assoluto piacimento...ovvero *senza un criterio*...quale sarebbe la probabilità con la quale una penna sia fra le camicie?
- Tua madre entra in camera...e...visibilmente alterata, ti intima di mettere ordine. Qual è la differenza fra un camera *ordinata* ed una *disordinata*?
- Per esempio se la camere *è in ordine*, è più o meno probabile trovare un libro nella libreria che sul tappeto?
- Qual è la differenza fra uno stato *ordinato* della tua camera ed uno *disordinato*?

Scheda: ordine e disordine nella *mia* stanza

j



- La tua stanza è suddivisa può essere schematizzata con un quadrato di 24 quadretti.
- I 4 quadretti verdi indicano la scrivania, i 2 quadretti marroni sono la libreria e i 3 azzurri, l'armadio.
- La tua stanza come sistema fisico può essere descritto da due stati: $S_1 =$ ordinata e $S_2 =$ disordinata.
- Immagina di avere una penna P, un libro L ed una camicia C.

Scheda: ordine e disordine nella *mia* stanza

- Usando la scheda disponi P, L e C in modo ....ragionevolmente ordinato S_1... :-) Quante possibili posizioni puoi scegliere per *ciascun* oggetto mantenendo la stanza ordinata?
- Usando la seconda scheda disponi P, L e C in modo ....disordinato S_2... :-/ Quante possibili posizioni puoi scegliere per *ciascun* oggetto mantenendo la stanza disordinata? *Sei autirizzato ad essere veramente disordinato quindi potresti, per esempio, mettere la penna e la camicia nello stesso riquadro!!!*
- Gli stati S_1 e S_2 della stanza sono due esempi di stati macroscopici.
- Gli stati invece di L, P e C sono invece detti stati microscopici.

Le probabilità

Le probabiltà che troverai saranno:

- $\mathbb{P}(\text{Penna sulla scrivania}) = 4/24 = 1/6$
- $\mathbb{P}(\text{Libro sulla libreria}) = 2/24 = 1/12$
- $\mathbb{P}(\text{Camicia nell'armadio}) = 3/24 = 1/8$
- $\mathbb{P}(\text{Un oggetto è in un qualunque punto fissato della stanza}) = 1/24$

Le probabilità

Le probabiltà che troverai saranno:

- $\mathbb{P}(\text{Penna sulla scrivania}) = 4/24 = 1/6$
- $\mathbb{P}(\text{Libro sulla libreria}) = 2/24 = 1/12$
- $\mathbb{P}(\text{Camicia nell'armadio}) = 3/24 = 1/8$
- $\mathbb{P}(\text{Un oggetto è in un qualunque punto fissato della stanza}) = 1/24$

Le probabilità

Le probabiltà che troverai saranno:

- $\mathbb{P}(\text{Penna sulla scrivania}) = 4/24 = 1/6$
- $\mathbb{P}(\text{Libro sulla libreria}) = 2/24 = 1/12$
- $\mathbb{P}(\text{Camicia nell'armadio}) = 3/24 = 1/8$
- $\mathbb{P}(\text{Un oggetto è in un qualunque punto fissato della stanza}) = 1/24$

Le probabilità

Le probabiltà che troverai saranno:

- $\mathbb{P}(\text{Penna sulla scrivania}) = 4/24 = 1/6$
- $\mathbb{P}(\text{Libro sulla libreria}) = 2/24 = 1/12$
- $\mathbb{P}(\text{Camicia nell'armadio}) = 3/24 = 1/8$
- $\mathbb{P}(\text{Un oggetto è in un qualunque punto fissato della stanza}) = 1/24$

Le probabilità

Le probabiltà che troverai saranno:

- $\mathbb{P}(\text{Penna sulla scrivania}) = 4/24 = 1/6$
- $\mathbb{P}(\text{Libro sulla libreria}) = 2/24 = 1/12$
- $\mathbb{P}(\text{Camicia nell'armadio}) = 3/24 = 1/8$
- $\mathbb{P}(\text{Un oggetto è in un qualunque punto fissato della stanza}) = 1/24$

L'entropia di Gibbs

- Supponiamo che un sistema fisico sia formato da N elementi. Lo stato S del sistema sarà quindi definito sapendo lo stato di ciascuno degli N oggetti: lo stato di *ordine* o *disordine* della tua camera dipende dallo stato degli oggetti presenti.
- Ogni oggetto componente il sistema può essere in un suo stato detto *microstato* con una probabilità p_i.
- Si chiama entropia di Gibbs la seguente espressione:

$$H_G(S) = H_G(p_1, ..., p_N) = -k_B \sum_{i=1}^{N} p_i \ln(p_i).$$

Calcolo dell'entropia di Gibbs

- $$H_G(p_1, \ldots, p_N) = -\sum_{i=1}^{N} p_i \ln(p_i)$$

- $$H_G(1/N, \ldots, 1/N) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \ln\left(\frac{1}{N}\right)$$

- Calcoliamo la variazione dell'entropia:

$$\Delta H_G = H_G(1/N, \ldots, 1/N) - H_G(p_1, \ldots, p_N)$$

$$\Delta H_G = \sum_{i=1}^{N} \left[p_i \ln(p_i) - \frac{1}{N} \ln(p_i) + \frac{1}{N} \ln(p_i) - \frac{1}{N} \ln\left(\frac{1}{N}\right) \right]$$

$$\Delta H_G = \sum_{i=1}^{N} \left[\left(p_i - \frac{1}{N}\right) \ln(p_i) + \frac{1}{N} \ln(N\, p_i) \right]$$

Calcolo dell'entropia di Gibbs

- $$H_G(p_1, \ldots, p_N) = -\sum_{i=1}^{N} p_i \ln(p_i)$$
- $$H_G(1/N, \ldots, 1/N) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \ln\left(\frac{1}{N}\right)$$
- Calcoliamo la variazione dell'entropia:
$$\Delta H_G = H_G(1/N, \ldots, 1/N) - H_G(p_1, \ldots, p_N)$$
$$\Delta H_G = \sum_{i=1}^{N} \left[p_i \ln(p_i) - \frac{1}{N} \ln(p_i) + \frac{1}{N} \ln(p_i) - \frac{1}{N} \ln\left(\frac{1}{N}\right) \right]$$
$$\Delta H_G = \sum_{i=1}^{N} \left[\left(p_i - \frac{1}{N}\right) \ln(p_i) + \frac{1}{N} \ln(N\, p_i) \right]$$

Calcolo dell'entropia di Gibbs

- $$H_G(p_1, \ldots, p_N) = -\sum_{i=1}^{N} p_i \ln(p_i)$$
- $$H_G(1/N, \ldots, 1/N) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \ln\left(\frac{1}{N}\right)$$
- Calcoliamo la variazione dell'entropia:

$$\Delta H_G = H_G(1/N, \ldots, 1/N) - H_G(p_1, \ldots, p_N)$$

$$\Delta H_G = \sum_{i=1}^{N} \left[p_i \ln(p_i) - \frac{1}{N} \ln(p_i) + \frac{1}{N} \ln(p_i) - \frac{1}{N} \ln\left(\frac{1}{N}\right) \right]$$

$$\Delta H_G = \sum_{i=1}^{N} \left[\left(p_i - \frac{1}{N} \right) \ln(p_i) + \frac{1}{N} \ln(N\, p_i) \right]$$

Calcolo dell'entropia di Gibbs

- $$H_G(p_1, \ldots, p_N) = -\sum_{i=1}^{N} p_i \ln(p_i)$$
- $$H_G(1/N, \ldots, 1/N) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \ln\left(\frac{1}{N}\right)$$
- Calcoliamo la variazione dell'entropia:

$$\Delta H_G = H_G(1/N, \ldots, 1/N) - H_G(p_1, \ldots, p_N)$$

$$\Delta H_G = \sum_{i=1}^{N} \left[p_i \ln(p_i) - \frac{1}{N} \ln(p_i) + \frac{1}{N} \ln(p_i) - \frac{1}{N} \ln\left(\frac{1}{N}\right) \right]$$

$$\Delta H_G = \sum_{i=1}^{N} \left[\left(p_i - \frac{1}{N} \right) \ln(p_i) + \frac{1}{N} \ln(N\, p_i) \right]$$

Calcolo dell'entropia di Gibbs

- L'entropia dello stato in cui si ha la *stanza ordinata*:

$$H(S_1) = -\left[\frac{1}{6}\ln\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{12}\ln\left(\frac{1}{12}\right) + \frac{1}{8}\ln\left(\frac{1}{8}\right)\right]$$

  ovvero

$$H(S_1) = \frac{3}{12}\ln(3) + \frac{17}{24}\ln(2).$$

- L'entropia dello stato in cui si ha la *stanza disordinata*:

$$H(S_2) = -\sum_{i=1}^{24}\frac{1}{24}\ln\left(\frac{1}{24}\right) = \ln(3) + 3\ln(2)$$

- Da cui si verifica facilmente:

$$H(S_1) < H(S_2)$$

Calcolo dell'entropia di Gibbs

- L'entropia dello stato in cui si ha la *stanza ordinata*:

$$H(S_1) = -\left[\frac{1}{6}\ln\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{12}\ln\left(\frac{1}{12}\right) + \frac{1}{8}\ln\left(\frac{1}{8}\right)\right]$$

ovvero

$$H(S_1) = \frac{3}{12}\ln(3) + \frac{17}{24}\ln(2).$$

- L'entropia dello stato in cui si ha la *stanza disordinata*:

$$H(S_2) = -\sum_{i=1}^{24}\frac{1}{24}\ln\left(\frac{1}{24}\right) = \ln(3) + 3\ln(2)$$

- Da cui si verifica facilmente:

$$H(S_1) < H(S_2)$$

Calcolo dell'entropia di Gibbs

- L'entropia dello stato in cui si ha la *stanza ordinata*:

$$H(S_1) = -\left[\frac{1}{6}\ln\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{12}\ln\left(\frac{1}{12}\right) + \frac{1}{8}\ln\left(\frac{1}{8}\right)\right]$$

ovvero

$$H(S_1) = \frac{3}{12}\ln(3) + \frac{17}{24}\ln(2).$$

- L'entropia dello stato in cui si ha la *stanza disordinata*:

$$H(S_2) = -\sum_{i=1}^{24} \frac{1}{24}\ln\left(\frac{1}{24}\right) = \ln(3) + 3\ln(2)$$

- Da cui si verifica facilmente:

$$H(S_1) < H(S_2)$$

Calcolo dell'entropia di Gibbs

- L'entropia dello stato in cui si ha la *stanza ordinata*:

$$H(S_1) = -\left[\frac{1}{6}\ln\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{12}\ln\left(\frac{1}{12}\right) + \frac{1}{8}\ln\left(\frac{1}{8}\right)\right]$$

ovvero

$$H(S_1) = \frac{3}{12}\ln(3) + \frac{17}{24}\ln(2).$$

- L'entropia dello stato in cui si ha la *stanza disordinata*:

$$H(S_2) = -\sum_{i=1}^{24}\frac{1}{24}\ln\left(\frac{1}{24}\right) = \ln(3) + 3\ln(2)$$

- Da cui si verifica facilmente:

$$H(S_1) < H(S_2)$$


CONOSCI IL SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA, MAMMA?
PARLA DEL FATTO CHE UN SISTEMA CHIUSO (COME L'UNIVERSO) AUMENTA COSTANTEMENTE LA PROPRIA ENTROPIA! I SUOI ATOMI VOLGONO INESORABILMENTE AL DISORDINE ED È UN PROCESSO IRREVERSIBILE!


BENE. DEVI COMUNQUE RIORDINARE LA TUA STANZA.
MA NON CAPISCI CHE È TERMODINAMICAMENTE IMPOSSIBILE?
FINE

L'entropia di Boltzman

- Consideriamo un gas in un contenitore. Da cosa è formato?
- Atomi o molecole
- Usualmente si misura un gas in litri o meglio in moli. Qual è l'ordine di grandezza delle particelle che dovremo considerare?
- Circa 10^{23} particelle.
- Come possiamo definire lo stato meccanico di ogni singola particella?
- Dal punto di vista della meccanica lo stato è definito se si determinassero posizione $\vec{x}$ e velocità, o meglio quantità di moto $\vec{p}$ per ogni particella. (MICROSTATO: Definiamo lo stato di una singola particella la coppia $(\vec{x}, \vec{p})$ data ad un tempo t.)

L'entropia di Boltzman

- Consideriamo un gas in un contenitore. Da cosa è formato?
- Atomi o molecole
- Usualmente si misura un gas in litri o meglio in moli. Qual è l'ordine di grandezza delle particelle che dovremo considerare?
- Circa 10^{23} particelle.
- Come possiamo definire lo stato meccanico di ogni singola particella?
- Dal punto di vista della meccanica lo stato è definito se si determinassero posizione $\vec{x}$ e velocità, o meglio quantità di moto $\vec{p}$ per ogni particella. (MICROSTATO: Definiamo lo stato di una singola particella la coppia $(\vec{x}, \vec{p})$ data ad un tempo t.)

L'entropia di Boltzman

- Consideriamo un gas in un contenitore. Da cosa è formato?
- Atomi o molecole
- Usualmente si misura un gas in litri o meglio in moli. Qual è l'ordine di grandezza delle particelle che dovremo considerare?
- Circa 10^{23} particelle.
- Come possiamo definire lo stato meccanico di ogni singola particella?
- Dal punto di vista della meccanica lo stato è definito se si determinassero posizione $\vec{x}$ e velocità, o meglio quantità di moto $\vec{p}$ per ogni particella. (MICROSTATO: Definiamo lo stato di una singola particella la coppia $(\vec{x}, \vec{p})$ data ad un tempo t.)

L'entropia di Boltzman

- Consideriamo un gas in un contenitore. Da cosa è formato?
- Atomi o molecole
- Usualmente si misura un gas in litri o meglio in moli. Qual è l'ordine di grandezza delle particelle che dovremo considerare?
- Circa 10^{23} particelle.
- Come possiamo definire lo stato meccanico di ogni singola particella?
- Dal punto di vista della meccanica lo stato è definito se si determinassero posizione $\vec{x}$ e velocità, o meglio quantità di moto $\vec{p}$ per ogni particella. (MICROSTATO: Definiamo lo stato di una singola particella la coppia $(\vec{x}, \vec{p})$ data ad un tempo t.)

L'entropia di Boltzman

- Consideriamo un gas in un contenitore. Da cosa è formato?
- Atomi o molecole
- Usualmente si misura un gas in litri o meglio in moli. Qual è l'ordine di grandezza delle particelle che dovremo considerare?
- Circa 10^{23} particelle.
- Come possiamo definire lo stato meccanico di ogni singola particella?
- Dal punto di vista della meccanica lo stato è definito se si determinassero posizione $\vec{x}$ e velocità, o meglio quantità di moto $\vec{p}$ per ogni particella. (MICROSTATO: Definiamo lo stato di una singola particella la coppia $(\vec{x}, \vec{p})$ data ad un tempo t.)

L'entropia di Boltzman

- Consideriamo un gas in un contenitore. Da cosa è formato?
- Atomi o molecole
- Usualmente si misura un gas in litri o meglio in moli. Qual è l'ordine di grandezza delle particelle che dovremo considerare?
- Circa 10^{23} particelle.
- Come possiamo definire lo stato meccanico di ogni singola particella?
- Dal punto di vista della meccanica lo stato è definito se si determinassero posizione $\vec{x}$ e velocità, o meglio quantità di moto $\vec{p}$ per ogni particella. (MICROSTATO: Definiamo lo stato di una singola particella la coppia $(\vec{x}, \vec{p})$ data ad un tempo t.)

L'entropia di Boltzman

- Consideriamo un gas in un contenitore. Da cosa è formato?
- Atomi o molecole
- Usualmente si misura un gas in litri o meglio in moli. Qual è l'ordine di grandezza delle particelle che dovremo considerare?
- Circa 10^{23} particelle.
- Come possiamo definire lo stato meccanico di ogni singola particella?
- Dal punto di vista della meccanica lo stato è definito se si determinassero posizione $\vec{x}$ e velocità, o meglio quantità di moto $\vec{p}$ per ogni particella. (MICROSTATO: Definiamo lo stato di una singola particella la coppia $(\vec{x}, \vec{p})$ data ad un tempo t.)

L'entropia di Boltzman

- Ora supponiamo di assegnare un'energia E al gas, quali conseguenze ci saranno per le singole particelle? Puoi immaginare esempi concreti che ti guidino nella riflessione?
- Ciascuna particella riceverà una parte dell'energia e si metterà in moto ed urterà contro le pareti del contenitore.
- Potremmo modificare lo stato di una mole di gas se modificassimo lo stato di singola particella?

L'entropia di Boltzman

- Ora supponiamo di assegnare un'energia E al gas, quali conseguenze ci saranno per le singole particelle? Puoi immaginare esempi concreti che ti guidino nella riflessione?
- Ciascuna particella riceverà una parte dell'energia e si metterà in moto ed urterà contro le pareti del contenitore.
- Potremmo modificare lo stato di una mole di gas se modificassimo lo stato di singola particella?

L'entropia di Boltzman

- Ora supponiamo di assegnare un'energia E al gas, quali conseguenze ci saranno per le singole particelle? Puoi immaginare esempi concreti che ti guidino nella riflessione?
- Ciascuna particella riceverà una parte dell'energia e si metterà in moto ed urterà contro le pareti del contenitore.
- Potremmo modificare lo stato di una mole di gas se modificassimo lo stato di singola particella?

L'entropia di Boltzman

- Ora supponiamo di assegnare un'energia E al gas, quali conseguenze ci saranno per le singole particelle? Puoi immaginare esempi concreti che ti guidino nella riflessione?
- Ciascuna particella riceverà una parte dell'energia e si metterà in moto ed urterà contro le pareti del contenitore.
- Potremmo modificare lo stato di una mole di gas se modificassimo lo stato di singola particella?

L'entropia di Boltzman

- Potremmo modificare lo stato di una mole di gas se modificassimo lo stato di singola particella?
- In effetti nessuno. L.Boltzman ai primi del 1900 mostrò che se consideriamo:
  - E energia complessiva delle particelle di un gas,
  - $\Omega(E)$ volume di tutti i possibili microstati permessi alle particelle del gas,
  - La funzione

$$H_B(E) = k_B \ln(\Omega(E))$$

L'entropia di Boltzman

- Potremmo modificare lo stato di una mole di gas se modificassimo lo stato di singola particella?
- In effetti nessuno. L.Boltzman ai primi del 1900 mostrò che se consideriamo:
  - E energia complessiva delle particelle di un gas,
  - $\Omega(E)$ volume di tutti i possibili microstati permessi alle particelle del gas,
  - La funzione

$$H_B(E) = k_B \ln(\Omega(E))$$

L'entropia di Boltzman

- A partire dalla formula:

$$S(E) = k_B \ln(\Omega(E))$$

Osserviamo:

- Se aumentiamo E come cambia il volume dei possibili stati delle particelle $\Omega(E)$?
- Cresce se E cresce, decresce se E diminuisce.
- Corrispondentemente come cambierà l'entropia $S(E)$?
- Rivedersi le proprietà dell'esponenziale...
- Boltzman dimostrò che $S(E)$ è equivalente alla entropia termodinamica ed in particolare che la temperatura del gas poteva essere calcolata:

$$\frac{1}{T} = \frac{\Delta S(E)}{\Delta E}$$

L'entropia di Boltzman

- A partire dalla formula:

$$S(E) = k_B \ln(\Omega(E))$$

Osserviamo:

- Se aumentiamo E come cambia il volume dei possibili stati delle particelle $\Omega(E)$?
- Cresce se E cresce, decresce se E diminuisce.
- Corrispondentemente come cambierà l'entropia $S(E)$?
- Rivedersi le proprietà dell'esponenziale...
- Boltzman dimostrò che $S(E)$ è equivalente alla entropia termodinamica ed in particolare che la temperatura del gas poteva essere calcolata:

$$\frac{1}{T} = \frac{\Delta S(E)}{\Delta E}$$

L'entropia di Boltzman

- A partire dalla formula:

$$S(E) = k_B \ln(\Omega(E))$$

Osserviamo:

- Se aumentiamo E come cambia il volume dei possibili stati delle particelle $\Omega(E)$?
- Cresce se E cresce, decresce se E diminuisce.
- Corrispondentemente come cambierà l'entropia $S(E)$?
- Rivedersi le proprietà dell'esponenziale...
- Boltzman dimostrò che $S(E)$ è equivalente alla entropia termodinamica ed in particolare che la temperatura del gas poteva essere calcolata:

$$\frac{1}{T} = \frac{\Delta S(E)}{\Delta E}$$

L'entropia di Boltzman

- A partire dalla formula:

$$S(E) = k_B \ln(\Omega(E))$$

Osserviamo:

- Se aumentiamo E come cambia il volume dei possibili stati delle particelle $\Omega(E)$?
- Cresce se E cresce, decresce se E diminuisce.
- Corrispondentemente come cambierà l'entropia $S(E)$?
- Rivedersi le proprietà dell'esponenziale...
- Boltzman dimostrò che $S(E)$ è equivalente alla entropia termodinamica ed in particolare che la temperatura del gas poteva essere calcolata:

$$\frac{1}{T} = \frac{\Delta S(E)}{\Delta E}$$

L'entropia di Boltzman

- A partire dalla formula:

$$S(E) = k_B \ln(\Omega(E))$$

Osserviamo:

- Se aumentiamo E come cambia il volume dei possibili stati delle particelle $\Omega(E)$?
- Cresce se E cresce, decresce se E diminuisce.
- Corrispondentemente come cambierà l'entropia $S(E)$?
- Rivedersi le proprietà dell'esponenziale...
- Boltzman dimostrò che $S(E)$ è equivalente alla entropia termodinamica ed in particolare che la temperatura del gas poteva essere calcolata:

$$\frac{1}{T} = \frac{\Delta S(E)}{\Delta E}$$

L'entropia di Boltzman

- A partire dalla formula:

$$S(E) = k_B \ln(\Omega(E))$$

Osserviamo:

- Se aumentiamo E come cambia il volume dei possibili stati delle particelle $\Omega(E)$?
- Cresce se E cresce, decresce se E diminuisce.
- Corrispondentemente come cambierà l'entropia $S(E)$?
- Rivedersi le proprietà dell'esponenziale...
- Boltzman dimostrò che $S(E)$ è equivalente alla entropia termodinamica ed in particolare che la temperatura del gas poteva essere calcolata:

$$\frac{1}{T} = \frac{\Delta S(E)}{\Delta E}$$

Osservazioni finali

1. ciccio...
2. tino...
3. pino...

Osservazioni finali

1. ciccio...
2. tino...
3. pino...

Osservazioni finali

1. ciccio...
2. tino...
3. pino...

Bibliografia

- *Caso, probabilità e complessità* A.Vulpiani, Ediesse (2015)
- *Caos* M. Malvaldi, S. Marmi, il Mulino (2019)
- *Information Theory, Inference and Learning Algorithms* D.Mackay, Cambridge UP (2008)