Geometria ed algoritmi: l'algoritmo di Erone...e quello del velista

Luca Sbano

Licei *Vittoria Colonna*,
Roma

Seminari per il Liceo Matematico, 13 Gennaio 2017

Motivazioni

- Riapproriarsi delle costruzioni geometriche per risolvere problemi in contesti anche molto diversi.
- Costruzioni geometriche ed *operazioni algebriche*.
- Costruzioni ripetute e procedure algebriche iterate.

Motivazioni

- Riapproriarsi delle costruzioni geometriche per risolvere problemi in contesti anche molto diversi.
- Costruzioni geometriche ed *operazioni algebriche*.
- Costruzioni ripetute e procedure algebriche iterate.

Motivazioni

- Riapproriarsi delle costruzioni geometriche per risolvere problemi in contesti anche molto diversi.
- Costruzioni geometriche ed *operazioni algebriche*.
- Costruzioni ripetute e procedure algebriche iterate.

Motivazioni

- Riapproriarsi delle costruzioni geometriche per risolvere problemi in contesti anche molto diversi.
- Costruzioni geometriche ed *operazioni algebriche*.
- Costruzioni ripetute e procedure algebriche iterate.

L'algoritmo di Erone

- Metodologia didattica: lavoro cooperativo in classe e a casa (dando tempo per sviluppare l'analisi) su due questioni
- Primo questione: *Sapendo che un triangolo rettangolo isoscele con due cateti di lunghezza unitaria ha ipotenusa uguale a $\sqrt{2}$, possiamo costruire altri triagoli rettangoli per rappresentare altre radici di numeri interi?*
- Seconda questione *costruzione dell'approssimazione di $\sqrt{2}$.*
- Realizzazione della costruzione in collaborazione con la collega di Disegno e Storia dell'Arte

L'algoritmo di Erone

- Metodologia didattica: lavoro cooperativo in classe e a casa (dando tempo per sviluppare l'analisi) su due questioni
- Primo questione: *Sapendo che un triangolo rettangolo isoscele con due cateti di lunghezza unitaria ha ipotenusa uguale a* $\sqrt{2}$*, possiamo costruire altri triagoli rettangoli per rappresentare altre radici di numeri interi?*
- Seconda questione *costruzione dell'approssimazione di* $\sqrt{2}$.
- Realizzazione della costruzione in collaborazione con la collega di Disegno e Storia dell'Arte

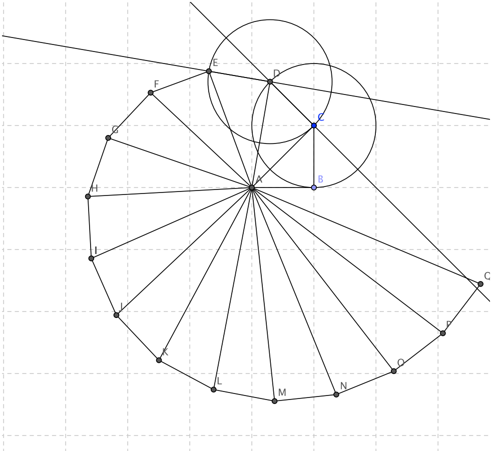
L'algoritmo di Erone

- Metodologia didattica: lavoro cooperativo in classe e a casa (dando tempo per sviluppare l'analisi) su due questioni
- Primo questione: *Sapendo che un triangolo rettangolo isoscele con due cateti di lunghezza unitaria ha ipotenusa uguale a* $\sqrt{2}$*, possiamo costruire altri triagoli rettangoli per rappresentare altre radici di numeri interi?*
- Seconda questione *costruzione dell'approssimazione di* $\sqrt{2}$.
- Realizzazione della costruzione in collaborazione con la collega di Disegno e Storia dell'Arte

L'algoritmo di Erone

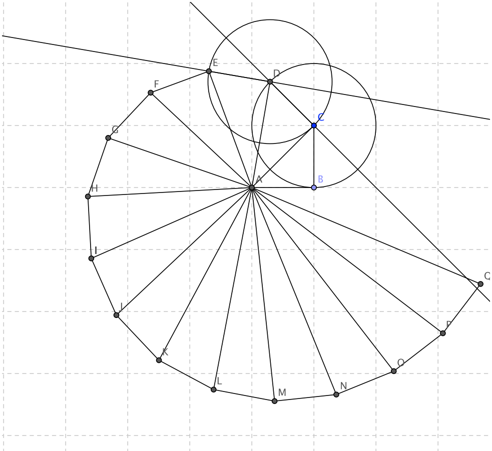
- Metodologia didattica: lavoro cooperativo in classe e a casa (dando tempo per sviluppare l'analisi) su due questioni
- Primo questione: *Sapendo che un triangolo rettangolo isoscele con due cateti di lunghezza unitaria ha ipotenusa uguale a* $\sqrt{2}$*, possiamo costruire altri triagoli rettangoli per rappresentare altre radici di numeri interi?*
- Seconda questione *costruzione dell'approssimazione di* $\sqrt{2}$.
- Realizzazione della costruzione in collaborazione con la collega di Disegno e Storia dell'Arte

Una spirale di triangoli e.... $\sqrt{n}$



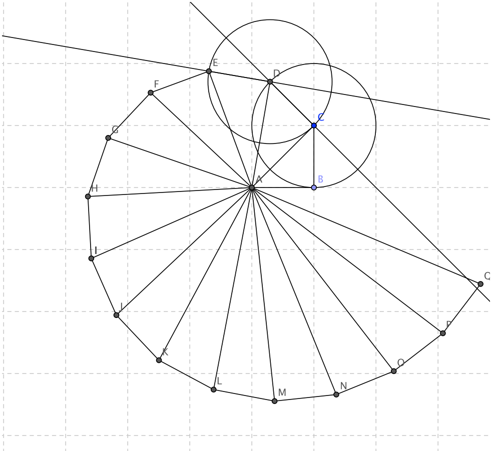
1. Sulla ipotenusa di ABC si costruisce il triangolo CDC, rettangolo in C con $\overline{CD} = 1$
2. Si itera la costruzione.
3. L'n-esimo triangolo avrà i cateti rispettivamente uguali a 1 e $\sqrt{n}$ con ipotenusa uguale a $\sqrt{n+1}$.

Una spirale di triangoli e.... $\sqrt{n}$



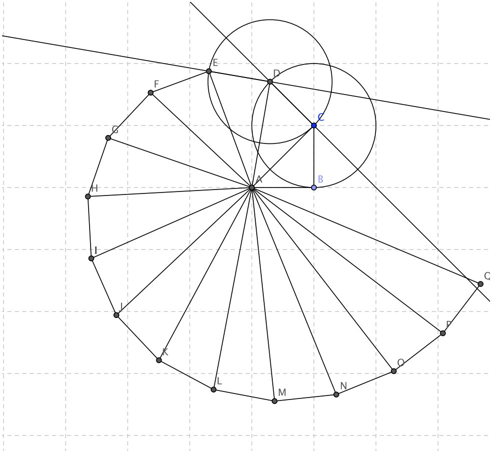
1. Sulla ipotenusa di ABC si costruisce il triangolo CDC, rettangolo in C con $\overline{CD} = 1$
2. Si itera la costruzione.
3. L'n-esimo triangolo avrà i cateti rispettivamente uguali a 1 e $\sqrt{n}$ con ipotenusa uguale a $\sqrt{n+1}$.

Una spirale di triangoli e.... $\sqrt{n}$



1. Sulla ipotenusa di ABC si costruisce il triangolo CDC, rettangolo in C con $\overline{CD} = 1$
2. Si itera la costruzione.
3. L'n-esimo triangolo avrà i cateti rispettivamente uguali a 1 e $\sqrt{n}$ con ipotenusa uguale a $\sqrt{n+1}$.

Una spirale di triangoli e....$\sqrt{n}$

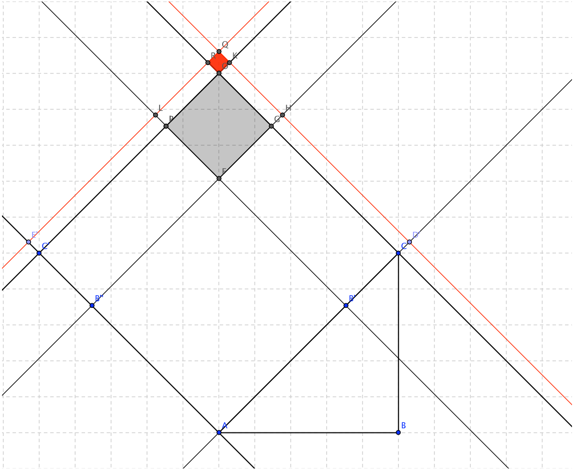


1. Sulla ipotenusa di ABC si costruisce il triangolo CDC, rettangolo in C con $\overline{CD} = 1$
2. Si itera la costruzione.
3. L'n-esimo triangolo avrà i cateti rispettivamente uguali a 1 e $\sqrt{n}$ con ipotenusa uguale a $\sqrt{n+1}$.

Il metodo di Erone: aspetto algebrico-analitico

- $(x_1 + \delta_1)^2 = 2$, $x_1 = 1$ prima approssimazione per $\sqrt{2}$, δ_1 prima stima dell'errore.
- $\delta_1^2 \simeq 0$ condizione per l'approssimazione
- $x_1^2 + 2\,x_1\,\delta_1 \simeq 2$ equazione per il calcolo di δ_1
- $x_2 = x_1 + \delta_1 = x_1 + \frac{2-x_1^2}{2\,x_1}$ seconda approssimazione di $\sqrt{2}$.

I primi due passi della costruzione di $\sqrt{2}$



Passi della costruzione (1)

1. Si costruisca un triangolo rettangolo ABC (rettangolo in B) di cateti unitari. L'ipotenusa AC misura $\sqrt{2}$ volte un cateto.
2. Sull'ipotenusa si costruisca il quadrato $AC'OC$.
3. Sull'ipotenusa si riporti (con il compasso) un cateto sul segmento ad esso congruente AB'.
4. Si costruisca il quadrato $AB''FB'$ di lato uguale al cateto.
5. Prima stima di $\sqrt{2}$: il quadrato $AC'OC$ ha area uguale a 2 e può essere decomposto nella somma di quattro poligoni due quadrati: $AB''FB$ e $FPOG$, e due rettangoli: $CB'FG$ e $B''C'PF$. Per stimare la radice di 2 si stima $B'C$:

$$Area(AC'OC) \simeq Area(AB''FB) + Area(CB'FG) + Area(B''C'PF)$$

trascurando l'area di $FPOG$. Il segmento $B'C$ gioca il ruolo del termine δ_1 nell'iterazione.

Passi della costruzione (1)

È importante notare che graficamente appare chiaro che a prima vista trascurare l'area di $FPOG$ possa condurre ad un'approssimazione non buona di $B'C$. In effetti si trova:

$$\overline{B'C} = \frac{1}{2}$$

e, semplicemente attraverso il disegno si mostra che $AB' + B'C > AC$ e dunque sia ha una una stima per eccesso di $\sqrt{2}$. Ma si può migliorare!

Passi della costruzione (2)

1. Sulla retta AC si costruisca $AD' = AB' + B'C$, e poi il quadrato $AE'QD'$ contenente $AC'OC$, il segmento CD' ne determina le dimensioni. Per stimarlo si utilizzerà il calcolo dell'area $Area(AC'OC)$ per differenza:

$$Area(AC'OC) = Area(AE'QD') - Area(CD'OK) + \\ - Area(C'E'RO) - Area(ROKQ).$$

2. L'area di $RQKO$ è più piccola dell'area di $FPOG$ e quindi si può pensare di trascurarla ottendendo la condizione:

$$Area(AC'OC) \simeq Area(AE'QD') - Area(CD'OK) - Area(C'E'RO).$$

3 Da un calcolo diretto di CD' si ottiene:

$$\overline{CD'} = \frac{1}{12}.$$

Il procedimento svolto per due passi permette di stimare:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{17}{12} = 1,41\bar{6}$$

che può essere confrontato con:

$$\sqrt{2} = 1.4142$$

calcolato alla quinta cifra decimale.

Osservazioni finali

Il procedimento potrebbe essere iterato. La dimostrazione della convergenza è usualmente ottenuta con i metodi dell'analisi, ma la decrescita dell'area dei quadrati *FPOG* e *ROKO* costituiscono un indicazione per l'intuizione della convergenza. Si può infatti notare che:

$$Area(FPGO) = \overline{B'C}^2 = \frac{1}{4}, \quad Area(ROKO) = \overline{CD'}^2 = \frac{1}{144}.$$

È facile osservare che, determinata l'approssimazione di $\sqrt{n}$, la costruzione può essere ripetuta in tutti i triangoli rettangoli con cateti $\sqrt{n}, 1$ ed ipotenusa $\sqrt{n+1}$ con $n \in \mathbb{N}$.

A questo punto si potrebbe cercare un legame più chiaro con la formulazione analitica del metodo. Si può allora proporre agli studenti di riflettere sul significato geometrico del quadrato del binomio

$$(x_n + \delta_n)^2 = x_n^2 + 2\, x_n\, \delta_n + \delta_n^2$$

comparando i termini con la figura.

L'algoritmo del velista

- Si tratta di un metodo semplice per determinare se due imbarcazioni si raggiungeranno navigando a velocità costante.
- Utilizza un metodo geometrico che possa essere impiegato su carte nautiche.

Il Metodo

Il testo di navigazione a vela dove ho trovato l'algoritmo non offre la giustificazione. È interessante riproporre agli studenti il metodo richiedendogli poi di trovare una giustificazione, una *dimostrazione*.

I passi dell'algoritmo

Per semplicità consideriamo due imbarcazioni che navighino sulla stessa congiungente, *hanno velocità collineari*.

1. Siano A e B i due natanti, e AB la retta che li congiunge.
2. Sono note le rispettive velocità che chiameremo rispettivamente $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
3. Se A e B si muovono l'uno verso l'altro si riportino i rispettivi vettori velocità nei punti A e B ortogonalmente alla retta AB in due semipiani diversi e con direzioni discordi (fig. del **Primo Caso**).
4. Se A e B si muovono nello stesso verso, i vettori velocità verranno riportati sempre ortogonali ad AB ma giacenti nello stesso semipiano e con verso concorde (fig. del **Secondo Caso**).
5. Infine si tracci la retta a passante per le punte dei vettori velocità. L'eventuale punto d'intersezione I di a con la retta AB è il punto in cui i natanti si incontreranno.

I passi dell'algoritmo

Per semplicità consideriamo due imbarcazioni che navighino sulla stessa congiungente, *hanno velocità collineari*.

1. Siano A e B i due natanti, e AB la retta che li congiunge.
2. Sono note le rispettive velocità che chiameremo rispettivamente $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
3. Se A e B si muovono l'uno verso l'altro si riportino i rispettivi vettori velocità nei punti A e B ortogonalmente alla retta AB in due semipiani diversi e con direzioni discordi (fig. del **Primo Caso**).
4. Se A e B si muovono nello stesso verso, i vettori velocità verranno riportati sempre ortogonali ad AB ma giacenti nello stesso semipiano e con verso concorde (fig. del **Secondo Caso**).
5. Infine si tracci la retta a passante per le punte dei vettori velocità. L'eventuale punto d'intersezione I di a con la retta AB è il punto in cui i natanti si incontreranno.

I passi dell'algoritmo

Per semplicità consideriamo due imbarcazioni che navighino sulla stessa congiungente, *hanno velocità collineari*.

1. Siano A e B i due natanti, e AB la retta che li congiunge.
2. Sono note le rispettive velocità che chiameremo rispettivamente $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
3. Se A e B si muovono l'uno verso l'altro si riportino i rispettivi vettori velocità nei punti A e B ortogonalmente alla retta AB in due semipiani diversi e con direzioni discordi (fig. del **Primo Caso**).
4. Se A e B si muovono nello stesso verso, i vettori velocità verranno riportati sempre ortogonali ad AB ma giacenti nello stesso semipiano e con verso concorde (fig. del **Secondo Caso**).
5. Infine si tracci la retta a passante per le punte dei vettori velocità. L'eventuale punto d'intersezione I di a con la retta AB è il punto in cui i natanti si incontreranno.

I passi dell'algoritmo

Per semplicità consideriamo due imbarcazioni che navighino sulla stessa congiungente, *hanno velocità collineari*.

1. Siano A e B i due natanti, e AB la retta che li congiunge.
2. Sono note le rispettive velocità che chiameremo rispettivamente $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
3. Se A e B si muovono l'uno verso l'altro si riportino i rispettivi vettori velocità nei punti A e B ortogonalmente alla retta AB in due semipiani diversi e con direzioni discordi (fig. del **Primo Caso**).
4. Se A e B si muovono nello stesso verso, i vettori velocità verranno riportati sempre ortogonali ad AB ma giacenti nello stesso semipiano e con verso concorde (fig. del **Secondo Caso**).
5. Infine si tracci la retta a passante per le punte dei vettori velocità. L'eventuale punto d'intersezione I di a con la retta AB è il punto in cui i natanti si incontreranno.

I passi dell'algoritmo

Per semplicità consideriamo due imbarcazioni che navighino sulla stessa congiungente, *hanno velocità collineari*.

1. Siano A e B i due natanti, e AB la retta che li congiunge.
2. Sono note le rispettive velocità che chiameremo rispettivamente $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
3. Se A e B si muovono l'uno verso l'altro si riportino i rispettivi vettori velocità nei punti A e B ortogonalmente alla retta AB in due semipiani diversi e con direzioni discordi (fig. del **Primo Caso**).
4. Se A e B si muovono nello stesso verso, i vettori velocità verranno riportati sempre ortogonali ad AB ma giacenti nello stesso semipiano e con verso concorde (fig. del **Secondo Caso**).
5. Infine si tracci la retta a passante per le punte dei vettori velocità. L'eventuale punto d'intersezione I di a con la retta AB è il punto in cui i natanti si incontreranno.

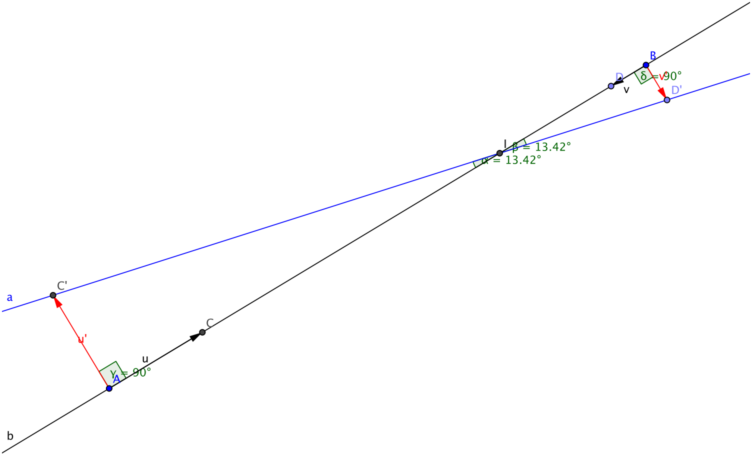
I passi dell'algoritmo

Per semplicità consideriamo due imbarcazioni che navighino sulla stessa congiungente, *hanno velocità collineari*.

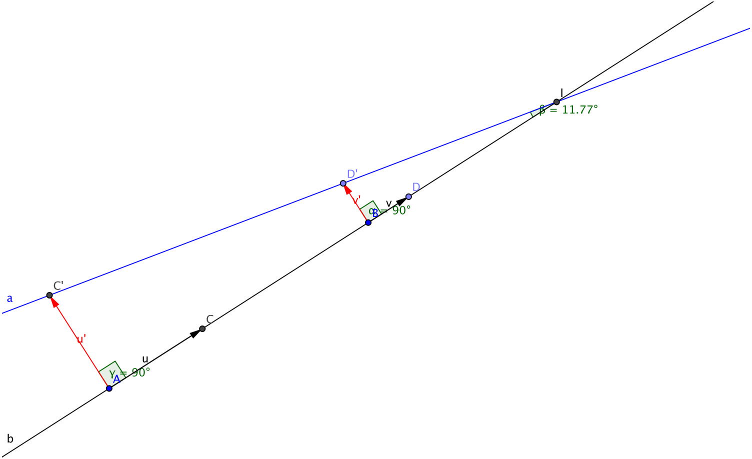
1. Siano A e B i due natanti, e AB la retta che li congiunge.
2. Sono note le rispettive velocità che chiameremo rispettivamente $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
3. Se A e B si muovono l'uno verso l'altro si riportino i rispettivi vettori velocità nei punti A e B ortogonalmente alla retta AB in due semipiani diversi e con direzioni discordi (fig. del **Primo Caso**).
4. Se A e B si muovono nello stesso verso, i vettori velocità verranno riportati sempre ortogonali ad AB ma giacenti nello stesso semipiano e con verso concorde (fig. del **Secondo Caso**).
5. Infine si tracci la retta a passante per le punte dei vettori velocità. L'eventuale punto d'intersezione I di a con la retta AB è il punto in cui i natanti si incontreranno.

Perchè funziona?

Primo caso



Secondo caso



Perchè funziona

- Si osservino i triangoli che $AC'I$ e $BD'I$ nei due casi.
- I triangoli hanno sempre angoli uguali nel vertice I ed, essendo rettangoli, sono simili.
- Gli angoli nel vertice I dipendono da AI e BI e dalle rispettive velocità u e v.
- In particolare:

$$\frac{1}{\tan\alpha} = \frac{AI}{u} = \frac{BI}{v} = \frac{1}{\tan\beta}$$

Tali rapporti misurano il tempo in cui A e B raggiungono il punto I.

- Se $\alpha = \beta$ i tempi sono uguali e quindi le imbarcazioni si incontrano.

Perchè funziona

- Si osservino i triangoli che $AC'I$ e $BD'I$ nei due casi.
- I triangoli hanno sempre angoli uguali nel vertice I ed, essendo rettangoli, sono simili.
- Gli angoli nel vertice I dipendono da AI e BI e dalle rispettive velocità u e v.
- In particolare:

$$\frac{1}{\tan\alpha} = \frac{AI}{u} = \frac{BI}{v} = \frac{1}{\tan\beta}$$

  Tali rapporti misurano il tempo in cui A e B raggiungono il punto I.
- Se $\alpha = \beta$ i tempi sono uguali e quindi le imbarcazioni si incontrano.

Perchè funziona

- Si osservino i triangoli che $AC'I$ e $BD'I$ nei due casi.
- I triangoli hanno sempre angoli uguali nel vertice I ed, essendo rettangoli, sono simili.
- Gli angoli nel vertice I dipendono da AI e BI e dalle rispettive velocità u e v.
- In particolare:

$$\frac{1}{\tan\alpha} = \frac{AI}{u} = \frac{BI}{v} = \frac{1}{\tan\beta}$$

  Tali rapporti misurano il tempo in cui A e B raggiungono il punto I.
- Se $\alpha = \beta$ i tempi sono uguali e quindi le imbarcazioni si incontrano.

Perchè funziona

- Si osservino i triangoli che $AC'I$ e $BD'I$ nei due casi.
- I triangoli hanno sempre angoli uguali nel vertice I ed, essendo rettangoli, sono simili.
- Gli angoli nel vertice I dipendono da AI e BI e dalle rispettive velocità u e v.
- In particolare:

$$\frac{1}{\tan\alpha} = \frac{AI}{u} = \frac{BI}{v} = \frac{1}{\tan\beta}$$

  Tali rapporti misurano il tempo in cui A e B raggiungono il punto I.
- Se $\alpha = \beta$ i tempi sono uguali e quindi le imbarcazioni si incontrano.

Perchè funziona

- Si osservino i triangoli che $AC'I$ e $BD'I$ nei due casi.
- I triangoli hanno sempre angoli uguali nel vertice I ed, essendo rettangoli, sono simili.
- Gli angoli nel vertice I dipendono da AI e BI e dalle rispettive velocità u e v.
- In particolare:

$$\frac{1}{\tan\alpha} = \frac{AI}{u} = \frac{BI}{v} = \frac{1}{\tan\beta}$$

  Tali rapporti misurano il tempo in cui A e B raggiungono il punto I.
- Se $\alpha = \beta$ i tempi sono uguali e quindi le imbarcazioni si incontrano.

Perchè funziona

- Si osservino i triangoli che $AC'I$ e $BD'I$ nei due casi.
- I triangoli hanno sempre angoli uguali nel vertice I ed, essendo rettangoli, sono simili.
- Gli angoli nel vertice I dipendono da AI e BI e dalle rispettive velocità u e v.
- In particolare:

$$\frac{1}{\tan\alpha} = \frac{AI}{u} = \frac{BI}{v} = \frac{1}{\tan\beta}$$

  Tali rapporti misurano il tempo in cui A e B raggiungono il punto I.
- Se $\alpha = \beta$ i tempi sono uguali e quindi le imbarcazioni si incontrano.