La geometria dei moti planetari

Luca Sbano

Licei *Vittoria Colonna*,
Roma

Seminari per il Liceo Matematico

Indice

Motivazioni

- Mostrare come inferire dalle leggi sperimentali proprietà generali dalle quali partire per proporre leggi.
- Mostrare come, da principi e leggi generali dedurre le proprietà più importanti che ci si aspetta dalle osservazioni sperimentali.

Questo approccio fu seguito da Isaac Newton nei suoi *Principia* per dedurre le leggi che governano i moti planetari attraverso i metodi della geometria euclidea.
Nella seconda metà del XX secolo, Richard P. Feynman, nelle sue lezioni, ripropose l'approccio newtoniano con alcune modifiche.

Prerequisiti

Leggi di Kepler

- $K1$ legge degli ellissi: i pianeti percorrono orbite ellittiche che hanno un fuoco in comune occupato dal Sole.
- $K2$ legge delle aree: la congiungente pianeta Sole spazza aree uguali in tempi uguali.
- $K3$ $T^2/a^3 = cost$, T periodo, a semiasse maggiore dell'orbita.

Leggi di Newton:

- $N1$ primo principio della dinamica,
- $N2$ secondo principio della dinamica,
- $N3$ terzo principio della dinamica.

Lo studente è invitato a rivedere i principi e le leggi sopra indicate.

Scheda 0: Il moto circolare uniforme

1. Fissato un raggio r, un un moto circolare uniforme ha una traiettoria circolare ed il tempo T necessario a percorrerla è detto *periodo* .
2. Se la velocità v è in modulo costante quale sarà il suo valore?
3. Qual'è la direzione del vettore velocità? (Si consideri un vettore $\vec{r}$ che venga incrementato di $\Delta\vec{r}$ in un tempo Δt, che direzione avrà $\Delta\vec{r}$ se $\vec{r}+\Delta\vec{r}$ deve mantenere la lunghezza di $\vec{r}$?
4. Nel moto circolare uniforme l'accelerazione è costante?

Proviamo a rispondere domande proposte.

Scheda 0: Il moto circolare uniforme

5. Fissato un raggio r, un un moto circolare uniforme ha una traiettoria circolare ed il tempo T necessario a percorrerla è detto *periodo* .
6. Se la velocità v è in modulo costante quale sarà il suo valore?
7. Qual'è la direzione del vettore velocità? (Si consideri un vettore $\vec{r}$ che venga incrementato di $\Delta\vec{r}$ in un tempo Δt, che direzione avrà $\Delta\vec{r}$ se $\vec{r} + \Delta\vec{r}$ deve mantenere la lunghezza di $\vec{r}$?
8. Nel moto circolare uniforme l'accelerazione è costante?

Proviamo a rispondere domande proposte.

Relazioni da ricordare

- Modulo della velocità:
$$v = \frac{2\pi\, r}{T}$$
- Modulo della dell'accelerazione centripeta:
$$a = \frac{2\pi\, v}{T} = \frac{v^2}{r}$$
- Il vettore velocità $\vec{v}$ è perpendicolare ad $\vec{r}$ ed $\vec{a}$ è vettore *centripeto* (confrontare con figura 1).

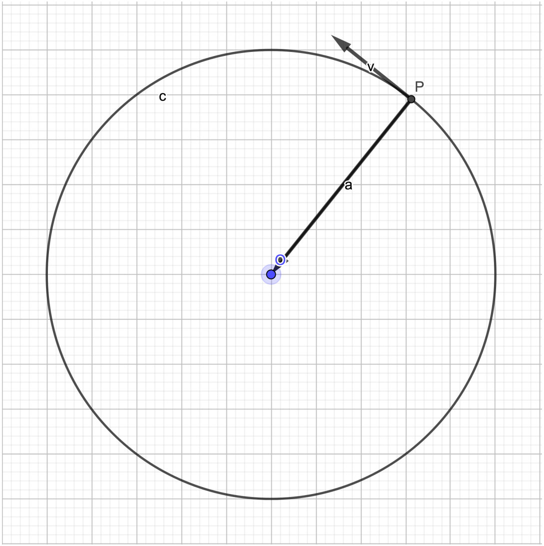

Figura 1: Moto circolare

Come possiamo giustificare l'accelerazione?

La variazione della di un vettore di *modulo* costante è sempre zero?

Si assuma il modulo di $\vec{v}_1$ ed il modulo di $\vec{v}_2$ sia v, la variazione $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$ si può decomporre in nella somma $\Delta v_{pe} + \Delta v_{pa}$ uno ortogonale all'altro (vedere figura 2). Lo stesso può essere fatto per l'accelerazione:

$$a_{pa} = \frac{\Delta v_{pa}}{\Delta t}.$$

Prendendo $\Delta\theta$ è piccolo e tale che:

$$\Delta v_{pe} = v\Delta\theta$$

quindi

$$a_{pe} = \frac{\Delta v_{pe}}{\Delta t} = v\frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

Come possiamo giustificare l'accelerazione?

La variazione della di un vettore di *modulo* costante è sempre zero?
Si assuma il modulo di $\vec{v}_1$ ed il modulo di $\vec{v}_2$ sia v, la variazione $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$ si può decomporre in nella somma $\Delta v_{pe} + \Delta v_{pa}$ uno ortogonale all'altro (vedere figura 2). Lo stesso può essere fatto per l'accelerazione:

$$a_{pa} = \frac{\Delta v_{pa}}{\Delta t}.$$

Prendendo $\Delta\theta$ è piccolo e tale che:

$$\Delta v_{pe} = v\Delta\theta$$

quindi

$$a_{pe} = \frac{\Delta v_{pe}}{\Delta t} = v\frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

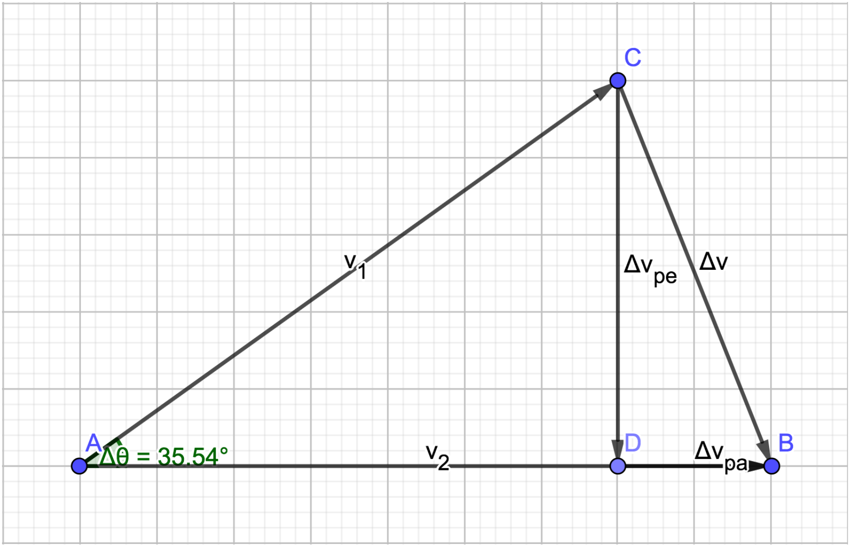

Figura 2: Decomposizione dell'accelerazione

In un intervallo Δt supponiamo che il corpo segua un arco $\Delta\theta$ di circonferenza, quindi:

$$r\Delta\theta = v\Delta t$$

perciò

$$a_{pe} = v\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

Scheda 1: La legge delle aree

9. Consideriamo un corpo in moto rettilineo ed uniforme descritto in figura 3:
10. *Come sono le aree dei triangoli OAB, OBC, OCD, ODE....ed infiniti altri...? Si osservi che $AB = BC = CD = ...$*
    È possibile proporre una legge?

Proviamo a rispondere alle domande proposte.

Scheda 1: La legge delle aree

11. Consideriamo un corpo in moto rettilineo ed uniforme descritto in figura 3:
12. *Come sono le aree dei triangoli OAB, OBC, OCD, ODE....ed infiniti altri...? Si osservi che $AB = BC = CD = ...$*
    È possibile proporre una legge?

Proviamo a rispondere alle domande proposte.

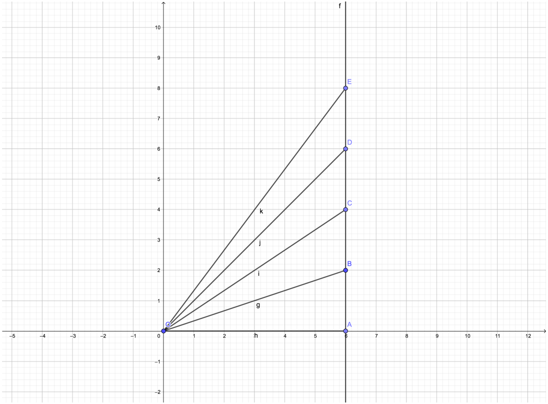

Figura 3: Legge delle aree (introduzione)

Scheda 2: Forze centrali e legge dell'aree

13. Mostrare che $K1$, $K3$ (per orbite circolari) e $N2$ implicano $F_{grav} \simeq m_1\, m_2/r^2$.
    È necessario scrivere esplicitamente $K3$, le proprietà di un'orbita circolare e $N2$ con lo scopo di trovare una relazione fra la forza e l'area.
14. Se un corpo, un pianeta, è soggetto ad $\vec{F}_{grav}$ forza centrale come cambia la costruzione precedente in figura 3?
    Si immagini un corpo in moto che segua il moto uniforme ma che è anche soggetto ad una forza centrale verso O. Come si modifica il disegno in figura 3?

    Dopo aver provato a modificare la figura 3 la si confronti con la figura 4.
15. Le leggi $K2$ e $K3$ ci permettono di capire e descrivere l'andamento della velocità del corpo.

Shall we have a go? :-)

Scheda 2: Forze centrali e legge dell'aree

16. Mostrare che $K1$, $K3$ (per orbite circolari) e $N2$ implicano $F_{grav} \simeq m_1\, m_2/r^2$.
    È necessario scrivere esplicitamente $K3$, le proprietà di un'orbita circolare e $N2$ con lo scopo di trovare una relazione fra la forza e l'area.
17. Se un corpo, un pianeta, è soggetto ad $\vec{F}_{grav}$ forza centrale come cambia la costruzione precedente in figura 3?
    Si immagini un corpo in moto che segua il moto uniforme ma che è anche soggetto ad una forza centrale verso O. Come si modifica il disegno in figura 3?

    Dopo aver provato a modificare la figura 3 la si confronti con la figura 4.
18. Le leggi $K2$ e $K3$ ci permettono di capire e descrivere l'andamento della velocità del corpo.

Shall we have a go? :-)

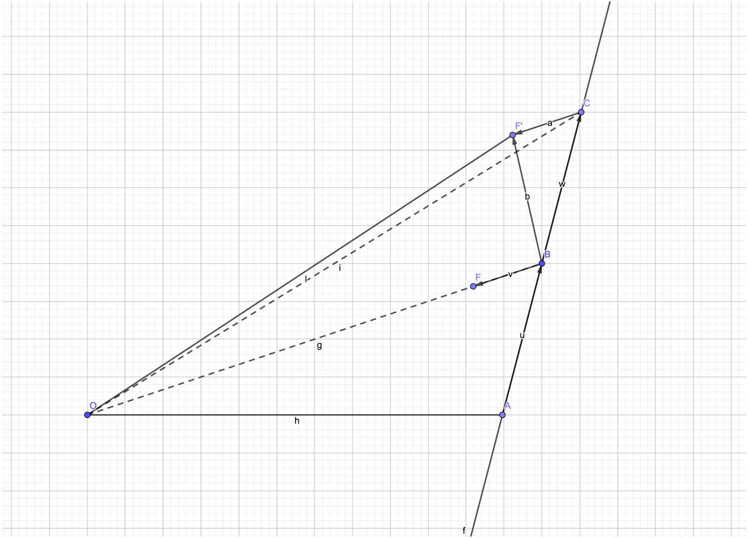

Figura 4: Legge delle aree (dettagli)

19. Keplero e Newton descrivono il moto in intervalli di tempo costanti. Feynman, nelle sue lezioni, studia il moto descritto usando intervalli angolari uguali. A tal fine si disegni un ellisse con in uno dei fuochi il Sole. Utilizzando $K2$ e $K3$ proviamo a rispondere alle seguenti domande:
    1. *Consideriamo i due archi AB e CD. Tutti e due sono percorsi nello stesso tempo. Quale dei due è percorso con la velocità più elevata?*
    2. *Come cambierebbe il problema se si considerasse il caso in cui gli angoli AOB e COD fossero uguali? Che relazioni vi saranno fra i tempi di percorrenza degli archi e le distanze dal fuoco F'?*
    3. *Poniamo r la distanza media da F' e $\Delta\theta$ è l'angolo in F' come calcoleremo l'area spazzata dal pianeta?*

Allora....ci si prova? :-))

20. Keplero e Newton descrivono il moto in intervalli di tempo costanti. Feynman, nelle sue lezioni, studia il moto descritto usando intervalli angolari uguali. A tal fine si disegni un ellisse con in uno dei fuochi il Sole. Utilizzando $K2$ e $K3$ proviamo a rispondere alle seguenti domande:
    1. *Consideriamo i due archi AB e CD. Tutti e due sono percorsi nello stesso tempo. Quale dei due è percorso con la velocità più elevata?*
    2. *Come cambierebbe il problema se si considerasse il caso in cui gli angoli AOB e COD fossero uguali? Che relazioni vi saranno fra i tempi di percorrenza degli archi e le distanze dal fuoco F'?*
    3. *Poniamo r la distanza media da F' e $\Delta\theta$ è l'angolo in F' come calcoleremo l'area spazzata dal pianeta?*

    Allora....ci si prova? :-))

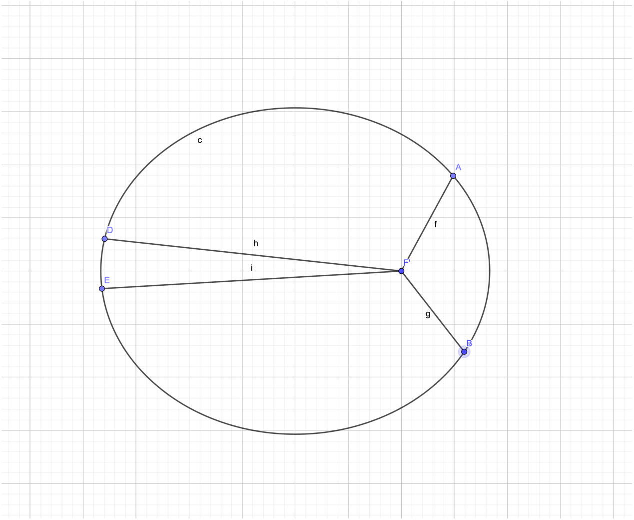

Figura 5: Legge delle aree

Scheda 3: Il cerchio delle velocità

21. È possibile utilizzare direttamente le proprietà della forza.
    - $F\Delta t \sim \Delta v$ teorema dell'impulso,
    - $F \sim \frac{1}{r^2}$ dipendenza della forza da r.

    La legge delle aree:

    $$r^2\Delta\theta \sim \Delta t$$

    e quindi

    $$\Delta\theta \sim \Delta v.$$

22. Costruiamo una rappresentazione della velocità in funzione dell'angolo θ. Fissiamo $\Delta\theta$. Allora la velocità varia di un $\Delta v \sim \Delta\theta$ costante in modulo. Il vettore velocità varia ma essendo Δv costante si viene a formare un poligono con tutti i lati uguali ed angoli esterni uguali, quindi un poligono regolare (forse con `GeoGebra`?). Se $\Delta\theta$ viene preso sempre più piccolo si forma un cerchio, detto *cerchio delle velocità*.

Si può utilizzare la legge presente nella **Scheda 1**. La quantità fisica che ben si adatta a descrivere la legge delle aree è il *momento della quantità di moto* definito come:

$$J = m\,v\,r$$

La legge delle aree $K2$ ci dice che J è costante. Poichè $v\Delta t = r\Delta\theta$, J può essere riscritta come:

$$J = m\,v\,r = m\,r^2\,\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

ma

$$m\frac{\Delta v}{\Delta\theta} = m\,\frac{\Delta v}{\Delta t}\frac{\Delta t}{\Delta\theta} \text{ ed anche } m\,\frac{\Delta v}{\Delta t} = F$$

quindi

$$m\,\frac{\Delta v}{\Delta\theta} = F\frac{\Delta t}{\Delta\theta}$$

Ora

$$\frac{\Delta t}{\Delta\theta} = \frac{mr^2}{J} \qquad F = \frac{k}{r^2}$$

Possiamo concludere che:

$$m\,\frac{\Delta v}{\Delta\theta} = \frac{k}{r^2}\,\frac{mr^2}{J} = \frac{m\,k}{J} = cost$$

La variazione di v è proporzionale a quella dell'angolo.

* La velocità di un corpo è per costruzione tangente alla traiettoria, *come si utilizzano le informazioni contenute nel cerchio delle velocità per costruire la traiettoria del pianeta?*

Scheda 4: Proprietà del cerchio delle velocità

23. Confrontiamo l'ellisse costruito approssimandolo con triangoli con agnoli e con vertice in F_1 e di estensione uguale a $\Delta\theta$. Il modulo dell'incremento di velocità $\Delta\vec{v}$ è costante in modulo, ma quali saranno gli angoli fra gli incrementi di velocità lungo la traiettoria?

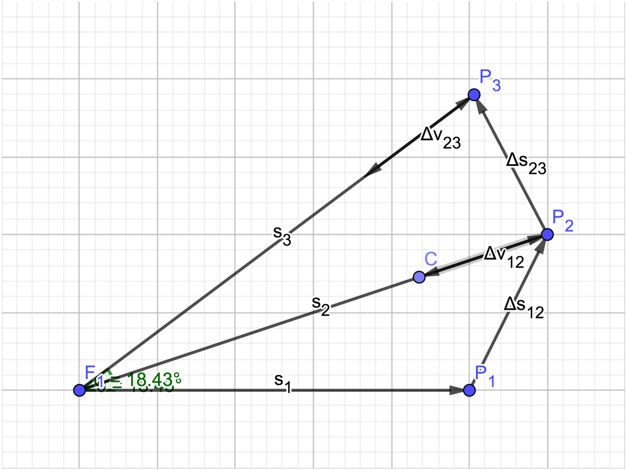

Figura 6: Variazione della velocità

24. La circonferenza delle velocità è approssimata da un poligono i cui lati hanno tutti lunghezza Δv costante. *Qual'è l'angolo fra due Δv adiacenti?*

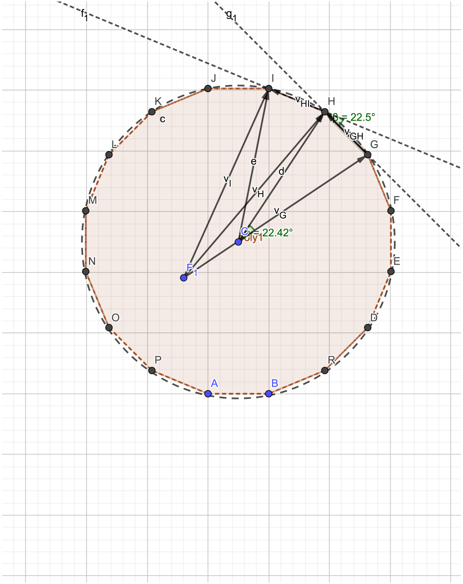

Figura 7: La circonferenza delle velocità

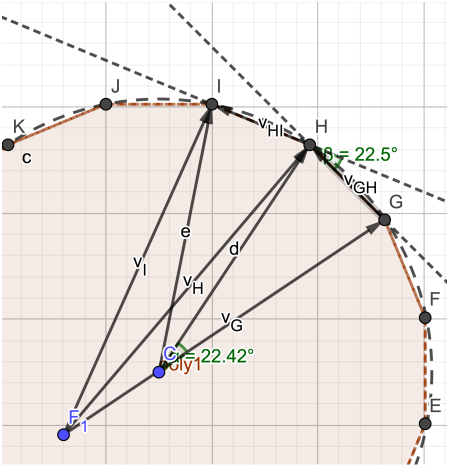

Figura 8: Dettaglio della circonferenza delle velocità

Scheda 5: Dal cerchio delle velocità alle orbite ellittiche

25. Ultimo passo: ricostruiamo l'ellisse a partire dal cerchio delle velocità.

    Let's follow Newton and Feynman!!! ;-))))

    1. Osservazioni preliminari: Ricordare la definizione di ellisse come luogo geometrico nel piano. Costruzione: *Il metodo del giardiniere*. Costruiamo un ellisse di fuochi F ed F' arbitrari.
    2. Prendiamo un punto P sull'ellisse e per esso tracciamo la retta tangente t. Prolunghiamo PF nella retta PF e poi tracciamo la retta a perpendicolare a t e chiamiamo $G' = a \cap PF$. *Che proprietà ha il triangolo $F'G'P$? Se spostiamo G' cosa accade a P? (Si potrebbe usare `GeoGebra`)*

Scheda 5: Dal cerchio delle velocità alle orbite ellittiche

26. Ultimo passo: ricostruiamo l'ellisse a partire dal cerchio delle velocità.

    Let's follow Newton and Feynman!!! ;-))))

    1. Osservazioni preliminari: Ricordare la definizione di ellisse come luogo geometrico nel piano. Costruzione: *Il metodo del giardiniere*. Costruiamo un ellisse di fuochi F ed F' arbitrari.
    2. Prendiamo un punto P sull'ellisse e per esso tracciamo la retta tangente t. Prolunghiamo PF nella retta PF e poi tracciamo la retta a perpendicolare a t e chiamiamo $G' = a \cap PF$. *Che proprietà ha il triangolo $F'G'P$? Se spostiamo G' cosa accade a P? (Si potrebbe usare `GeoGebra`)*

27. **Metodo alternativo a partire da una circonferenza**: la circonferenze delle velocità.
    1. Fissiamo i due fuochi F e F'.
    2. Tracciamo una semiretta a uscente da F' in una direzione qualsiasi.
    3. Tracciamo poi una retta t perpendicolare ad a che non intersechi il segmento FF'. Chiamiamo $T = a \cap t$. Notare che t determina due semipiani uno dei quali contente F'.
    4. Sulla retta a scegliamo un punto G' nel semipiano non contenente F' in modo che $F'T = TG'$. La retta a.
       Che proprietà ha la retta a?
    5. Congiungiamo G' con F e notiamo che $G'F \cap a \neq \emptyset$ e quindi chiamiamo $P = G'F \cap a$, e disegnamo il segmento $F'P$.
    6. *Cosa avviene se G' percorre una circonferenza di raggio $G'F'$? Che curva traccerà P?*
       Si potrebbe utilizzare `GeoGebra` *per esplorare la costruzione.*

1. **Cosa possiamo congetturare?**
2. Consideriamo i triangoli $F'TP$ ed $G'TP$. Se i triangoli $F'TP$ ed $G'TP$ fossero uguali allora....
3. Cosa possiamo dire di $F'P + PF$ e $G'F$?
4. Se G' si muove descrive una curva nel piano, di che curva si tratta?
5. Cosa accade a P?
6. La retta t che posizione ha rispetto a alla curva che si genera facendo muovere G'?
7. Possiamo dimostrare che la retta t sia tangente alla curva tracciata da P?
8. Prendiamo un un punto Q su t e non coincidente con P. Congiungiamo Q con F', G' e F.
9. Confrontiamo $QF + QF'$ e $PF + PF'$...cosa possiamo dire?

28 **Conclusione** G' è un percorre una circonferenza mentre percorre P è su un ellise e laretta t è tangente ad esso.

Aren't you happier? ;-)))))))

Costruzione di Feynamn in GeoGebra

29. **Conclusione** G' è un percorre una circonferenza mentre percorre P è su un ellise e laretta t è tangente ad esso.

Aren't you happier? ;-)))))))

Costruzione di Feynamn in GeoGebra