# Incontro n. 1
# I poliedri

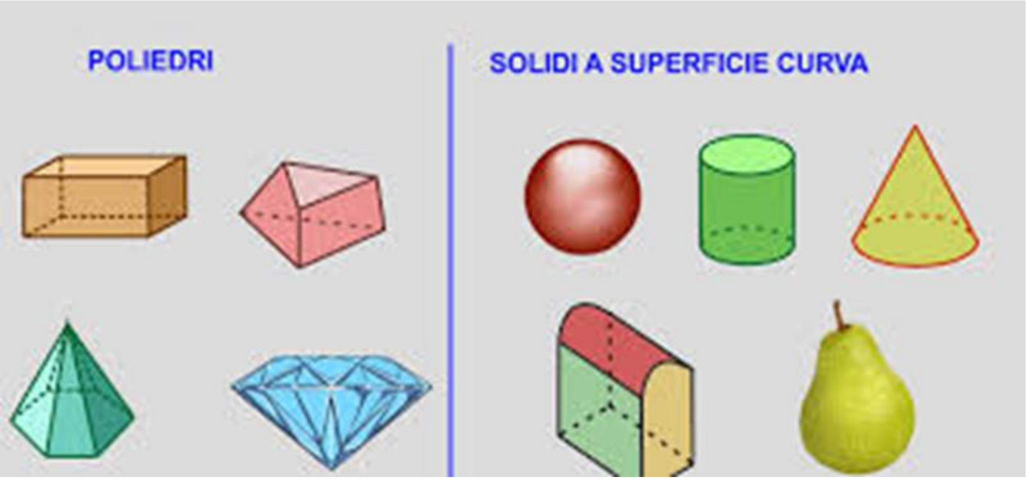
Liceo Matematico

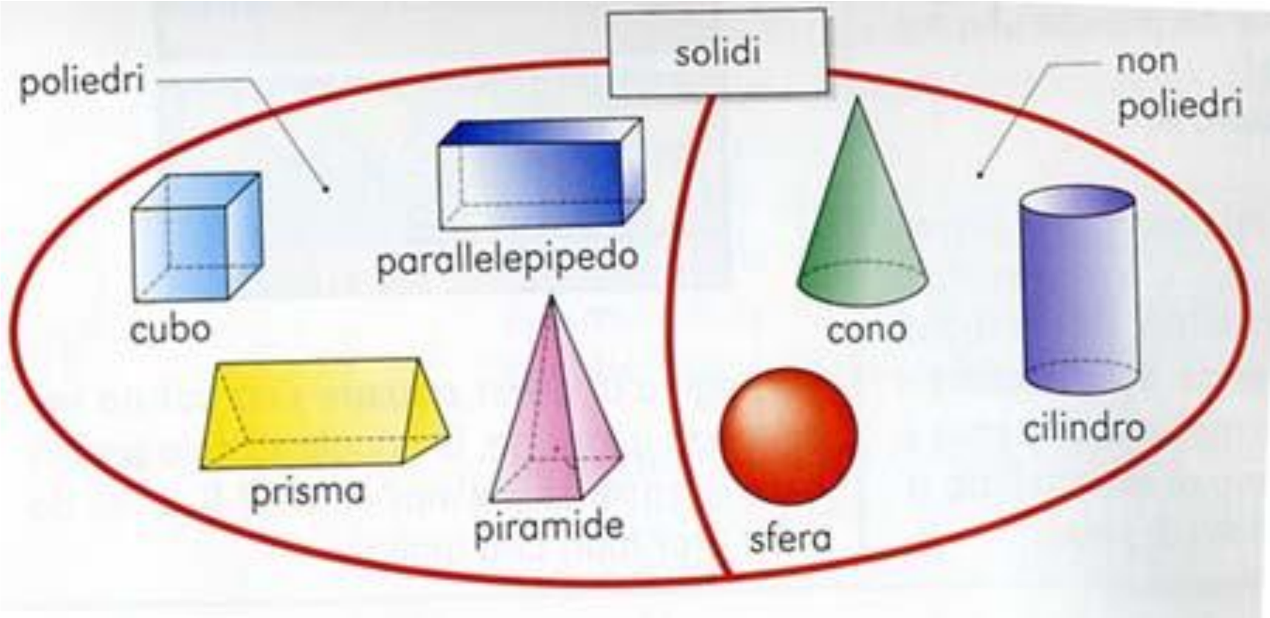
Classe 4 Q

a.s. 2019/20

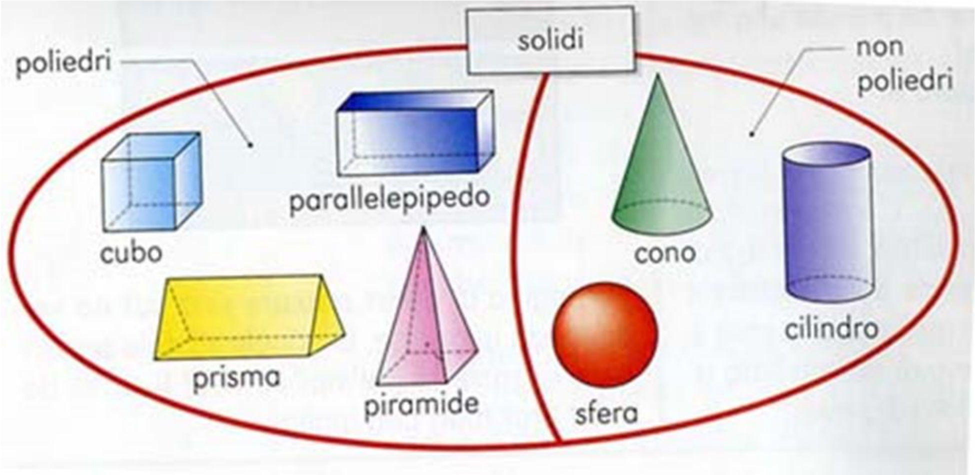
# Solidi: cosa sono?

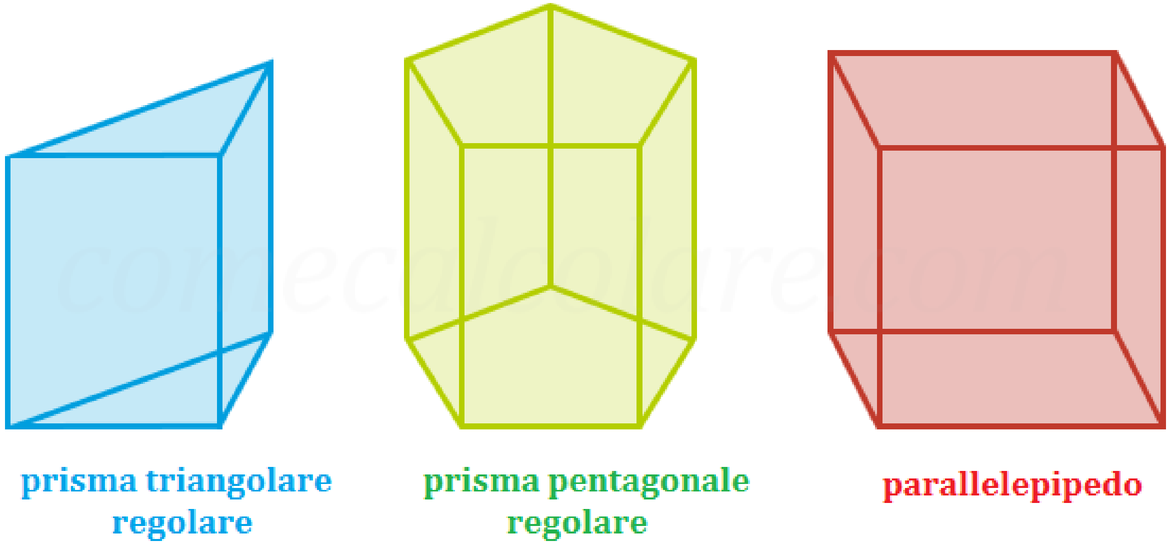
# Solidi e poliedri: sono la stessa cosa?



# Poliedri e prismi: sono la stessa cosa?

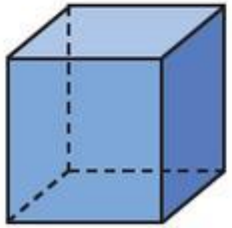


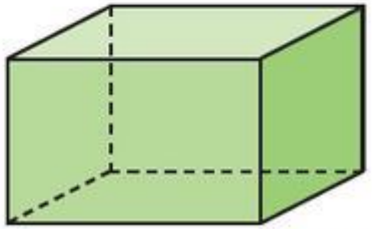
# I poliedri

## I prismi

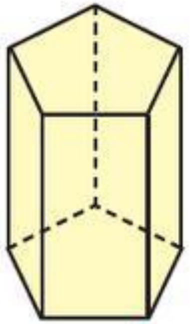
Hanno due facce opposte, uguali, parallele.



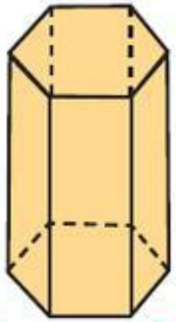
cubo



parallelepipedo



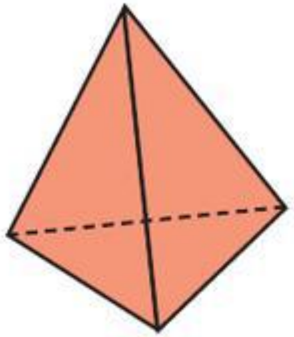
prisma a base pentagonale



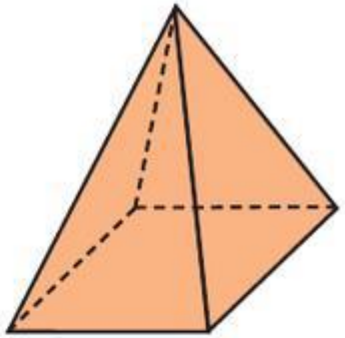
prisma a base esagonale

## Le piramidi

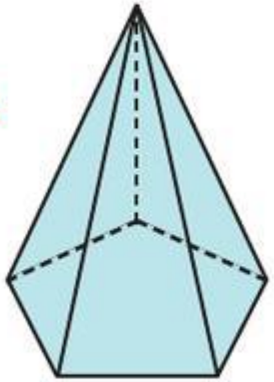
Hanno una base e le facce laterali triangolari.
Non hanno facce opposte parallele.



piramide a base triangolare



piramide a base quadrata



piramide a base pentagonale

# *Poliedri*

Il termine poliedro deriva dalla radice greca poly (molti) ed hedra (sede); nonostante il termine hedra originariamente significasse sede, fu poi utilizzato a partire da Archimede (Siracusa, circa 287 a.C. / Siracusa, 212 a.C.) per indicare le facce del poliedro. Quindi possiamo affermare che poliedro significhi "molte facce".

# *Poliedri: relazione di Eulero*

- Facce (F): sono facce poligonali.
- Spigoli (E) : ogni coppia di facce adiacenti si incontra in un segmento chiamato spigolo.
- Vertici (V): spigoli adiacenti si incontrano nei vertici.

Il 14 novembre 1750, Eulero scrisse a un suo amico, Christian Goldbach (1690-1794), affermando "Mi sorprende che quelle proprietà generali sulla geometria dei solidi, per quanto ne sappia, non sono state osservate da nessun altro".

… l'annuncio a Goldbach nel 1750 della sua scoperta di questa relazione. Egli scrisse: "In ogni solido chiuso da facce piane la somma dei numeri delle facce ed il numero di angoli solidi eccede di due il numero degli spigoli,

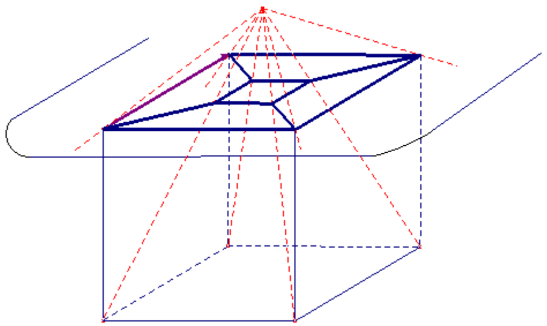
$H + S = A + 2$ ".

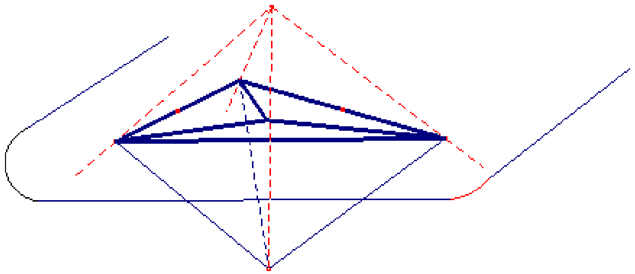
In termini più moderni $F + V = E+2$

$V - E + F =$ numero o caratteristica di Eulero

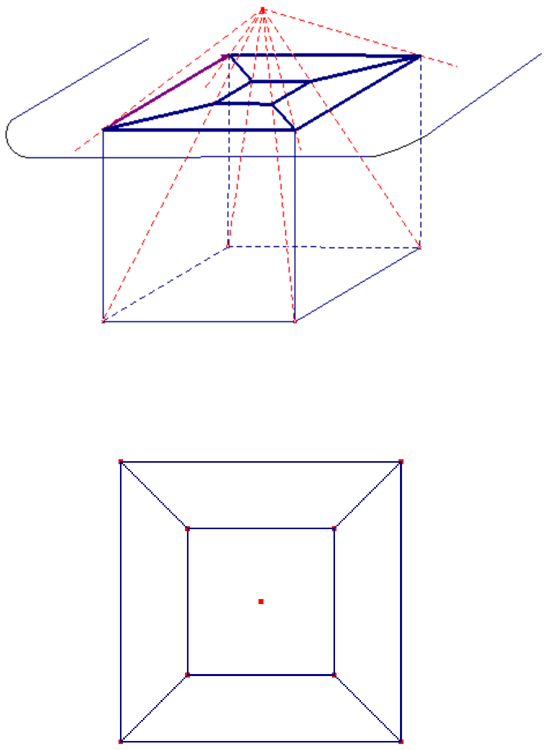
# Un modo di costruire un diagramma di Schleghel

Si proietta il poliedro sul piano di una sua faccia F da un punto P esterno al poliedro e vicino alla faccia considerata; il punto P deve essere scelto in modo tale che le proiezioni degli altri vertici del poliedro risultino interne alla proiezione della faccia considerata, la faccia F coincide con la sua proiezione . Ad ogni vertice e ad ogni spigolo del poliedro corrisponde rispettivamente un vertice e uno spigolo del diagramma.

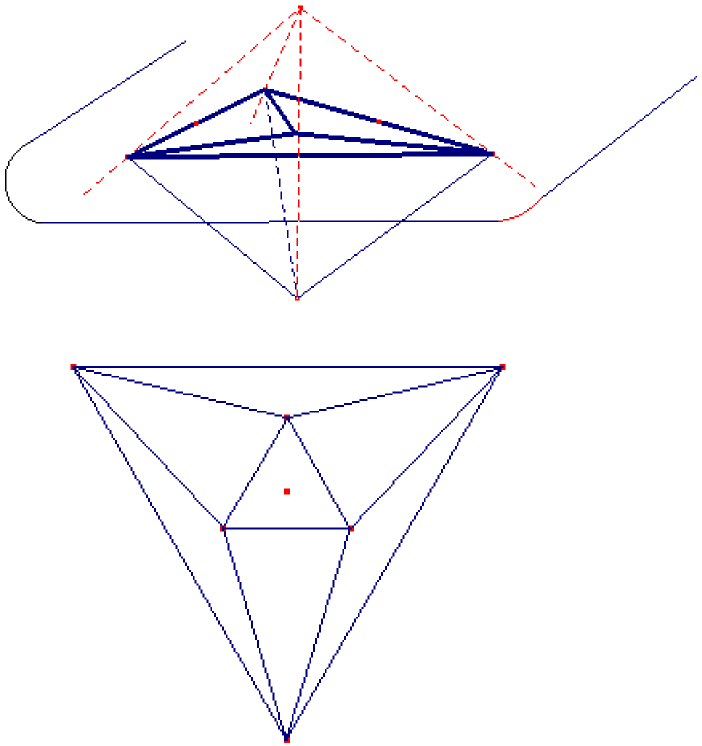




# Ad ogni vertice e ad ogni spigolo del poliedro corrisponde rispettivamente un vertice e uno spigolo del diagramma



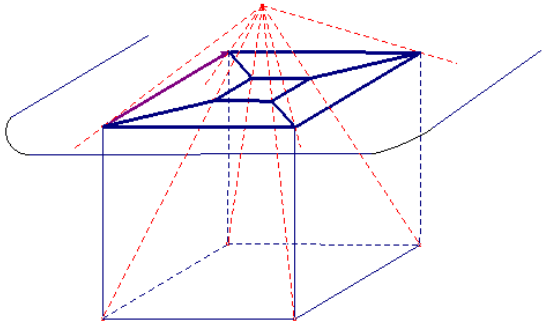
Cubo

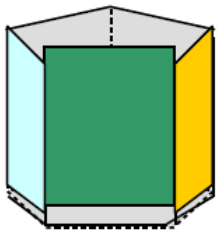


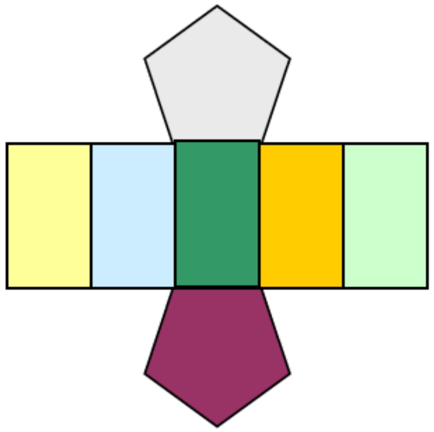
Ottaedro

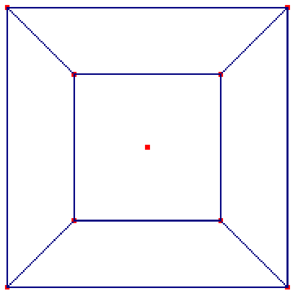
# Dal punto di vista topologico

## è come se la faccia scelta (in grigio) fosse l’intera regione di piano esterna al diagramma.

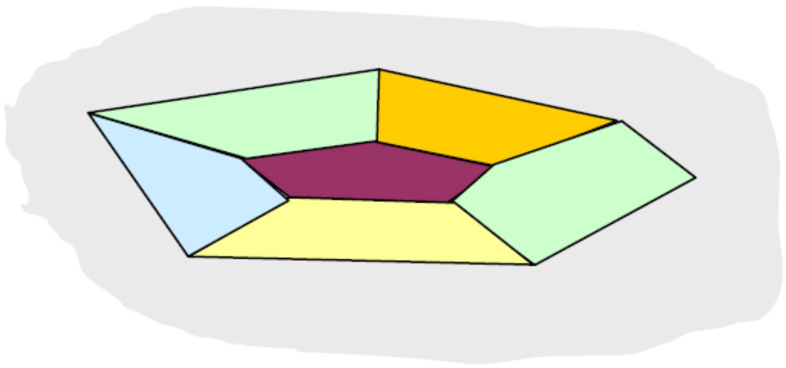








Cubo



# Dimostrazione della formula di Eulero
## $V - E + F = 2$

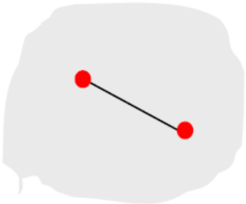
dimostriamo che la relazione vale per una **qualsiasi rete piana**, e quindi per **un qualsiasi poliedro** del quale possa essere costruito un diagramma di **Schlegel**.

- Partiamo da una rete originaria costituita da un solo vertice

$V - S + F = 1 - 0 + 1 = 2$

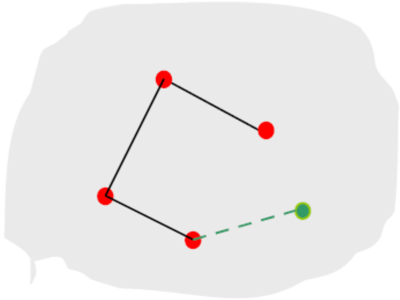
- aggiungiamo uno spigolo e un vertice:

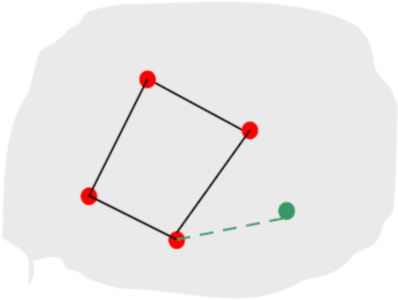
$V - S + F = 2 - 1 + 1 = 2$



# Aggiungiamo via via , nuovi vertici e nuovi spigoli. Quando aggiungiamo un nuovo spigolo può darsi che

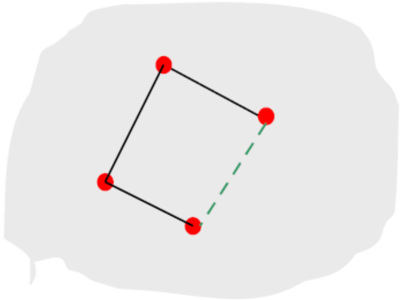
esso congiunga un vertice
già esistente con uno nuovo.
V e S aumentano di 1,
F resta immutato

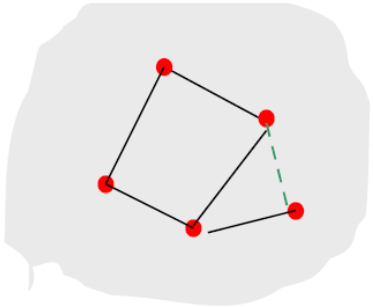


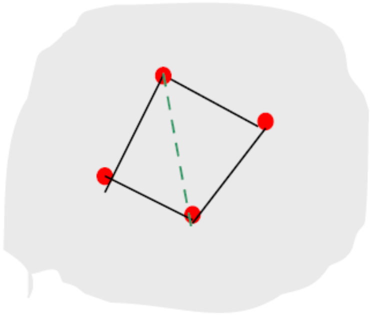


**in entrambi i casi la somma V – S + F, resta invariata**

congiunga due vertici già
esistenti. F e S aumentano di 1,
V non cambia.



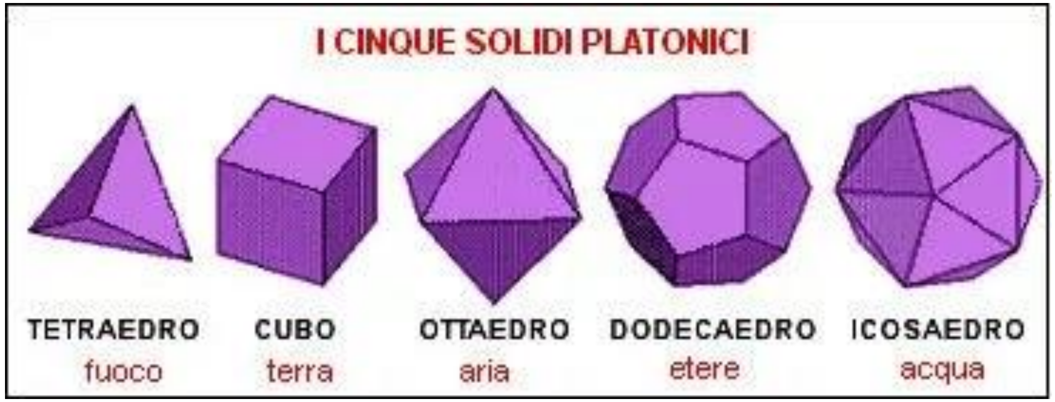


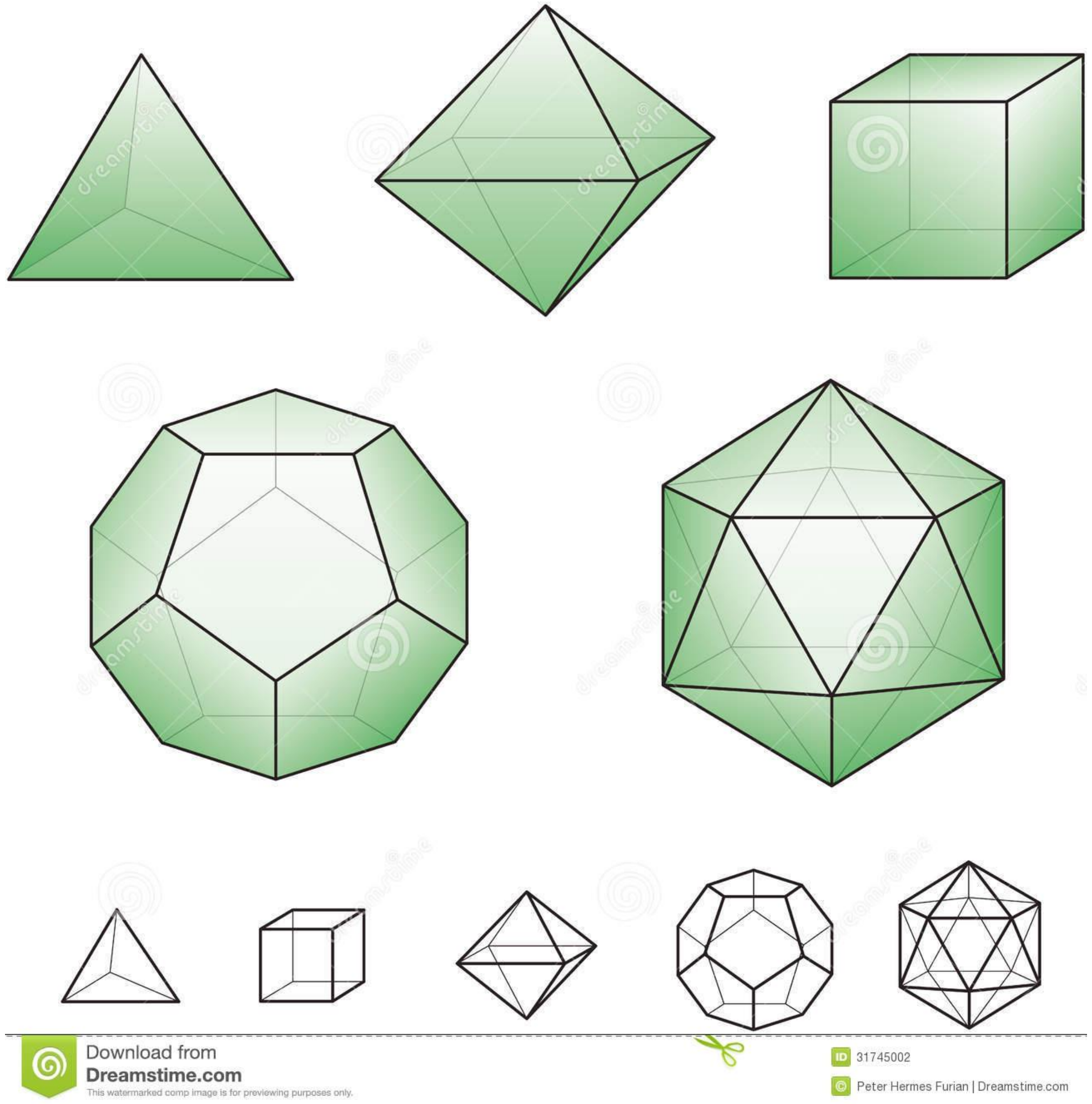


# *Poliedri regolari*

- Il poliedro `e convesso
- Ogni faccia `e un poligono regolare
- Tutte le facce sono congruenti tra loro
- Ogni vertice è circondato dallo stesso numero di facce
- Tutti gli angoloidi sono congruenti tra loro
- Tutti i diedri sono congruenti tra loro

# E questi cosa sono?



# Poliedri regolari: $qV = pF = 2S$

## *Dimostrazione*

- **p** = numero di lati (spigoli) o vertici di ciascuna faccia
- **q** = numero di facce incidenti su ogni vertice o numero di spigoli (lati) che si incontrano in ogni vertice
- **V** : numero dei vertici
- **S** : numero degli spigoli (dei lati)
- **F** : numero delle facce

-ogni spigolo condivide 2 facce: $F = 2S/p \longrightarrow pF = 2S$

-ogni spigolo congiunge 2 vertici: $V = 2S/q \longrightarrow qV = 2S$

# *Solidi platonici*

Un poliedro *convesso* è un **solido platonico** se, e solo se:

- tutte le sue facce sono poligoni regolari congruenti
- le facce si intersecano solo lungo lati
- in ogni vertice si incontrano lo stesso numero di facce
- Tutti gli angoli diedri sono tra loro congruenti
- Tutti gli angoloidi sono tra loro congruenti

Le due equazioni algebriche precedentemente trovate permettono di determinare i due interi positivi {**p**, **q**}; verifichiamo che le sole soluzioni sono quelle che realizzano i 5 solidi platonici.

pF= qV=2S  (valida per i solidi regolari)

F + V – S =2 (valida per tutti i solidi convessi-reti piane)

# Lezione n. 2; 24/09/2019

Scopriamo adesso

quali **poligoni**

possono essere

**facce** di un

**poliedro regolare**

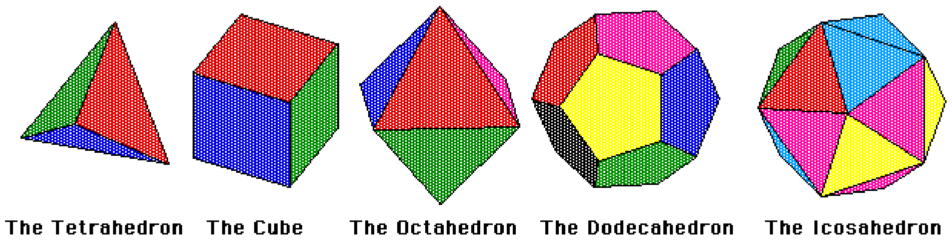
# Quali **poligoni** possono essere facce di un poliedro regolare?

- Triangoli? Sì/no; Perchè?
- Quadrati? Sì/no; Perchè?
- pentagoni? Sì/no; Perchè?
- Esagoni? Sì/no; Perchè?
- etc? Sì/no; Perchè?

# Allora p = 3,4,5

- **p** = numero di lati (spigoli del solido) o vertici di ciascuna faccia
- **q** = numero di facce incidenti su ogni vertice o numero di spigoli (lati) che si incontrano in ogni vertice

- p=3
  - q=3 ........................................... tetraedro (4 facce)
  - q=4 ........................................... ottaaedro (8 facce)
  - q=5 ........................................... icosaedro (20 facce)
- p=4
  - q=3 ........................................... esaedro (6 facce); cubo
- p=5
  - q=3 ........................................... dodecaedro (12 facce)



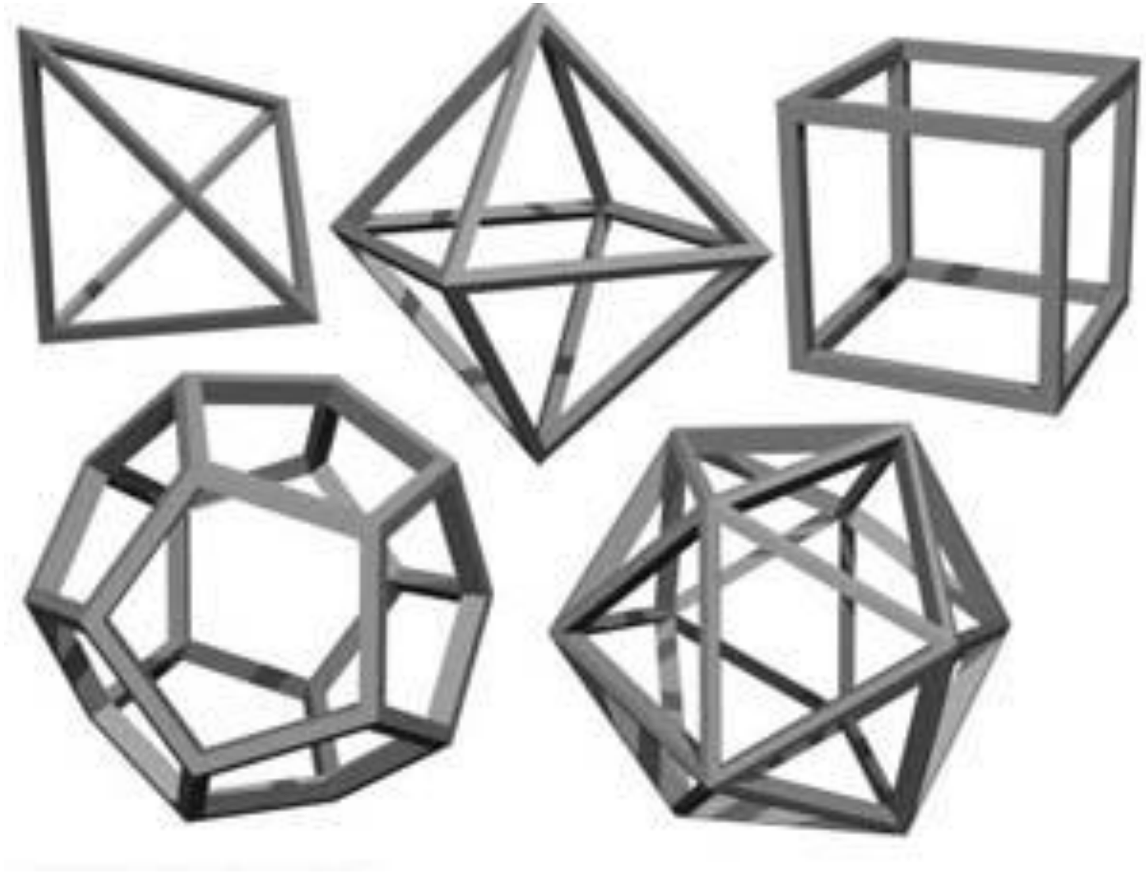

The five regular solids discovered by the Ancient Greek mathematicians are:

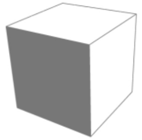
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| The **Tetrahedron**: | 4 vertices | 6 edges | 4 faces | each with 3 sides |
| The **Cube**: | 8 vertices | 12 edges | 6 faces | each with 4 sides |
| The **Octahedron**: | 6 vertices | 12 edges | 8 faces | each with 3 sides |
| The **Dodecahedron**: | 20 vertices | 30 edges | 12 faces | each with 5 sides |
| The **Icosahedron**: | 12 vertices | 30 edges | 20 faces | each with 3 sides |

The solids are regular because the same number of sides meet at the same angles at each vertex and identical polygons meet at the same angles at each edge.
These five are the only possible regular polyhedra.

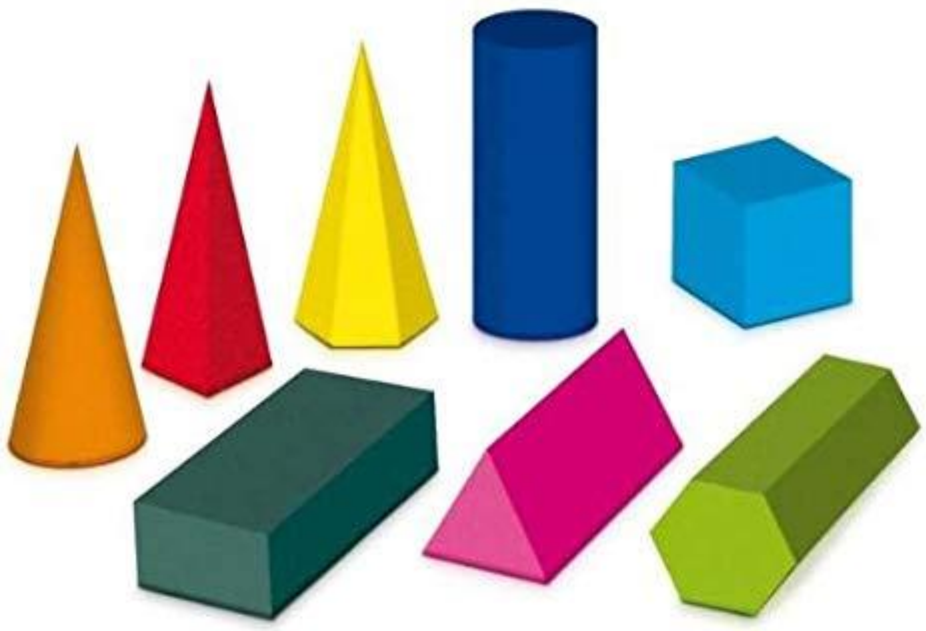
- {3,3} Tetraedro (3 spigoli per faccia, 3 spigoli da ogni vertice)
- {4,3} Cubo (4 spigoli per faccia, 3 spigoli da ogni vertice)
- {3,4} Ottaedro (3 spigoli per faccia, 4 spigoli in da ogni vertice)
- {5,3} Dodecaedro (5 spigoli per faccia, 3 spigoli da ogni vertice)
- {3,5} Icosaedro (3 spigoli per faccia, 5 spigoli da ogni vertice)

# Spigoli, Facce, Vertici: contiamoli

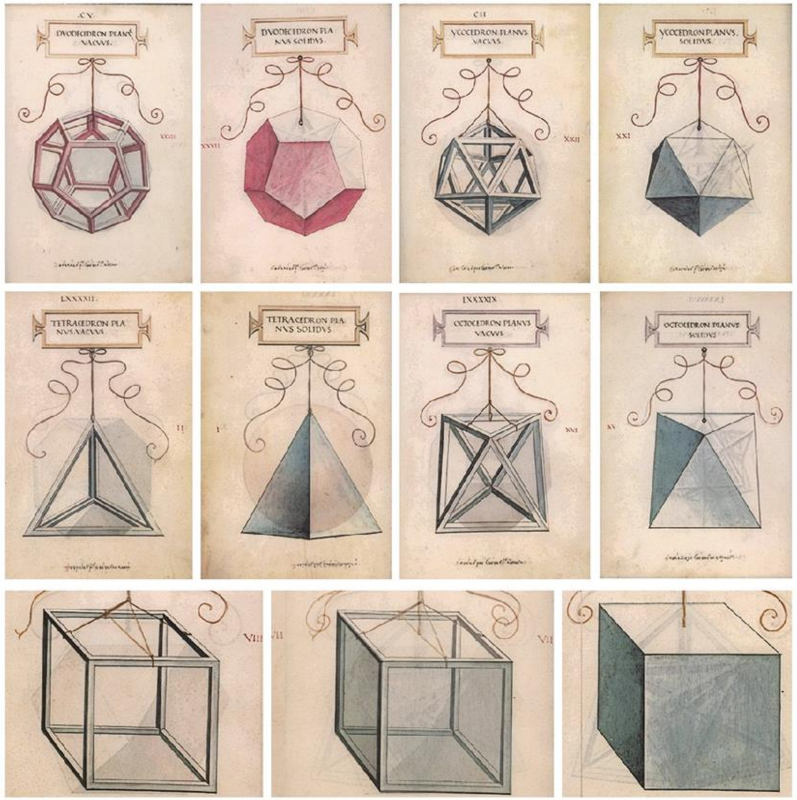


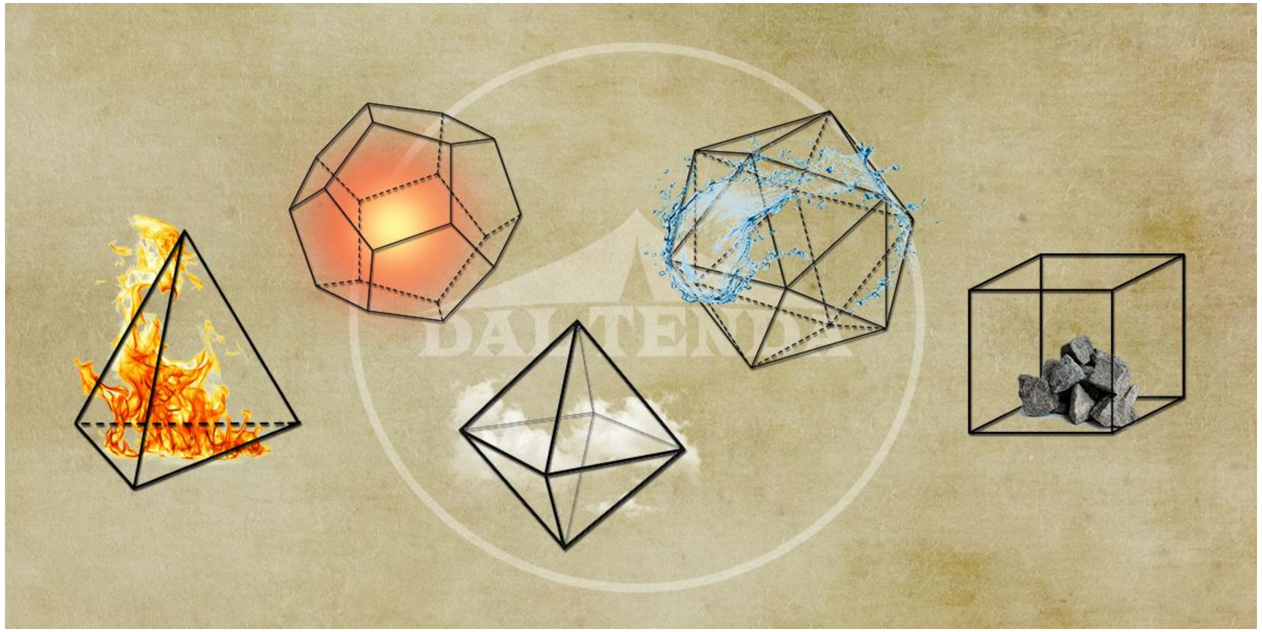
| | facce | spigoli | vertici |
|---|---|---|---|
|  *tetraedro* | 4 triangoli equilateri | 6 | 4 |
|  *esaedro (cubo)* | 6 quadrati | 12 | 8 |
|  *ottaedro* | 8 triangoli equilateri | 12 | 6 |
|  *dodecaedro* | 12 pentagoni regolari | 30 | 20 |
|  *icosaedro* | 20 triangoli equilateri | 30 | 12 |

# Completare il montaggio dei solidi



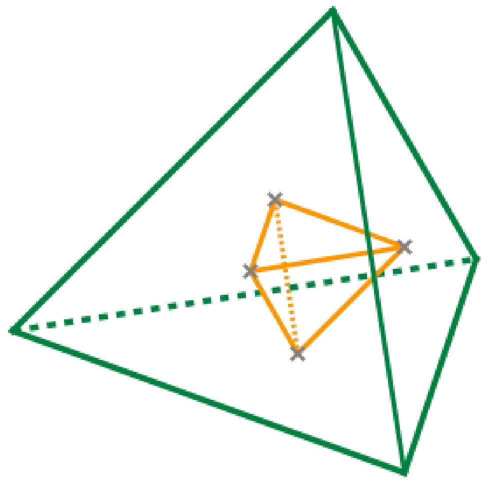
# Solidi platonici: adottiamone uno.

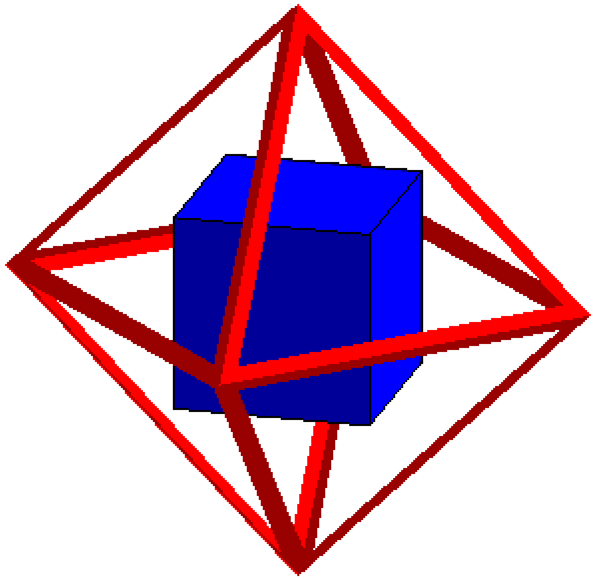


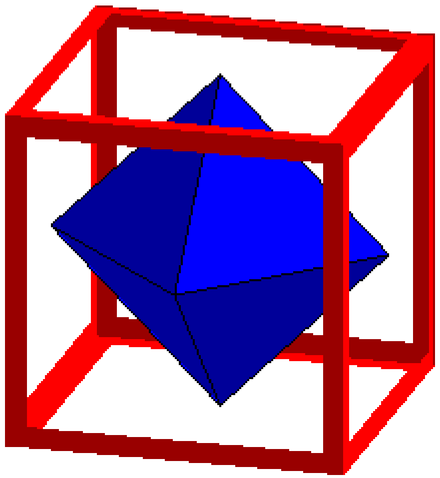


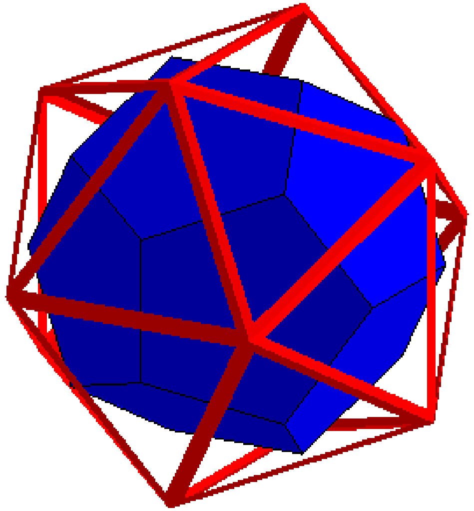
# **Poliedro duale Q:** ottenuto da un poliedro P

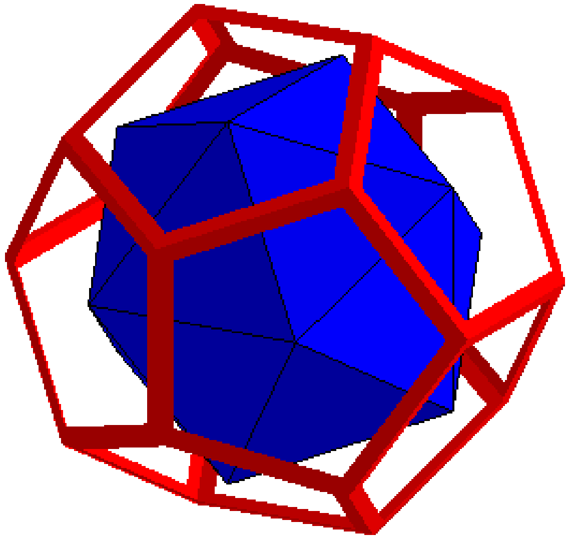
scambiando il ruolo dei **vertici** e delle **facce**











# Lavoro di gruppo: si inizia adesso, si completa a casa per martedì prossimo

Ogni gruppo deve presentare il solido adottato alla classe.

-modello

- Sviluppo piano
- Proprietà
- Sezioni piane
- Assi di simmetria
- Piani di simmetria
- Centro di simmetria
- duale

# Possibili approfondimenti

- Sfere inscritte e circoscritte
- Poliedri stellati
- Poliedri tronchi
- Solidi archimedei
- Cristalli, cluster, fullerene, nanotubi

# Incontro n. 3
# I poliedri

Liceo Matematico

Classe 4 Q

a.s. 2019/20

# Gruppi di lavoro

TAVOLO 1
4 alunni.

TAVOLO 2
4 alunni.

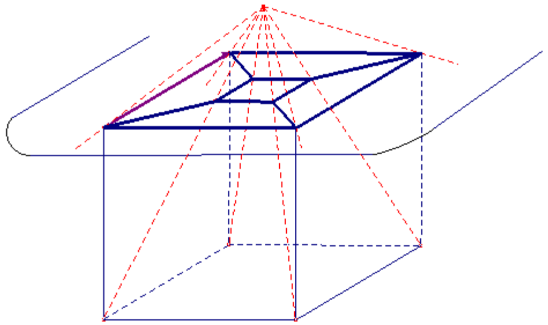
TAVOLO 3
3 alunni.

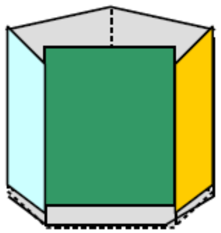
TAVOLO 4
4 alunni.

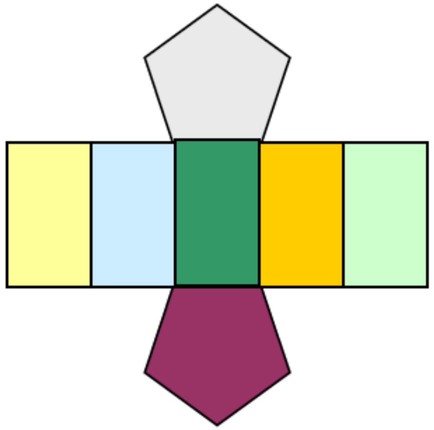
TAVOLO 5
3 alunni.

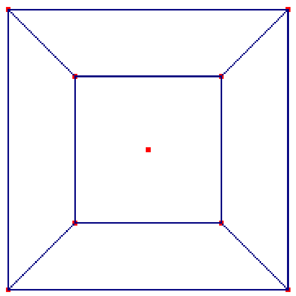
# **Schleghel** dal punto di vista topologico

è come se la faccia scelta (in grigio) fosse l'intera regione di piano esterna al diagramma.

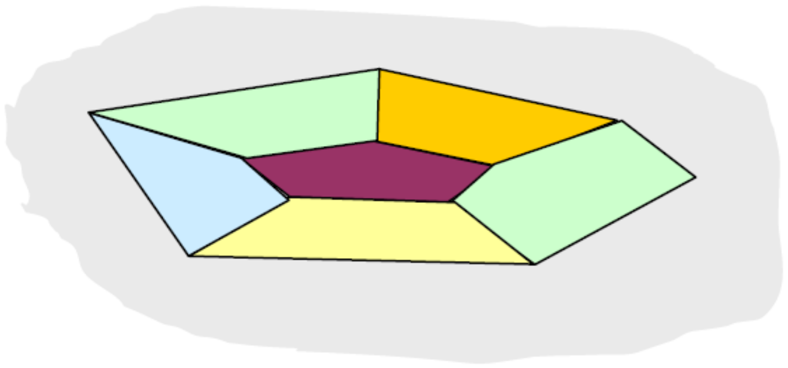








Cubo



# Dimostrazione della formula di Eulero
## $V - E + F = 2$

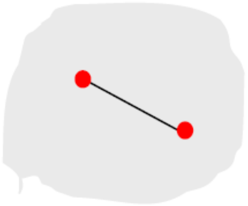
dimostriamo che la relazione vale per una **qualsiasi rete piana**, e quindi per **un qualsiasi poliedro** del quale possa essere costruito un diagramma di **Schlegel**.

- Partiamo da una rete originaria costituita da un solo vertice

$V - S + F = 1 - 0 + 1 = 2$

- aggiungiamo uno spigolo e un vertice:

$V - S + F = 2 - 1 + 1 = 2$

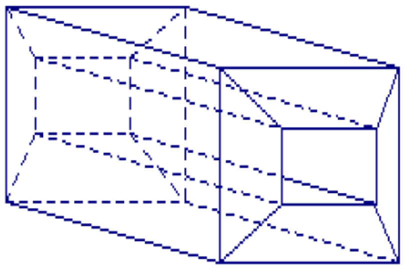


# la formula di Eulero vale per i poliedri topologicamente equivalenti ad una sfe

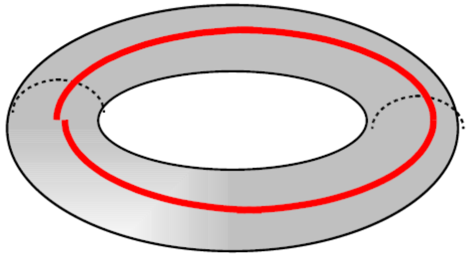
- ossia per quei poliedri che possono essere **trasformati con continuità** e **senza strappi** in una **sfera**.
- Consideriamo una sfera che ha centro in un punto O, interno al poliedro e raggio *r* sufficientemente grande da far sì che la sfera contenga tutto il poliedro.
- Proiettiamo da O vertici e spigoli del poliedro sulla sfera: sulla superficie sferica
- ad ogni **vertice** del poliedro corrisponde un punto,
- ad ogni **spigolo** un arco di circonferenza massima
- ad ogni **faccia** un poligono sferico.

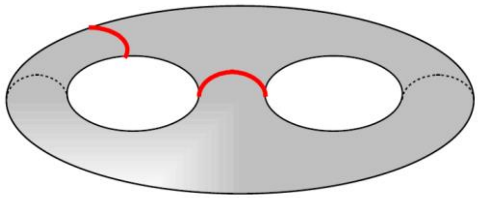
# I poligoni sferici ottenuti hanno in comune soltanto punti del loro contorno e la loro unione ricopre tutta la superficie sferica.

- **genere** di una superficie: e il numero massimo di tagli (curve chiuse appartenenti alla superficie) che non si intersecano che
- possono essere eseguiti su una su
essa si disconnetta.



- genere 0: sfera
- genere 1: toro (ciambella con 1 b
- genere 2: ciambella con 2 buchi
- Un poliedro si dice di genere g se la sua superficie è topologicamente equivalente ad una superficie di genere g.





- **V+F-S= 2-2g**

# Poliedri regolari: qV = pF = 2 S

Il poliedro è convesso; Ogni faccia è un poligono regolare;  Tutte le facce sono congruenti tra;  Ogni vertice è circondato dallo stesso numero di facce; angoloidi e diedri congruenti tra loro

## *Dimostrazione*

- **p** = numero di lati (spigoli) o vertici di ciascuna faccia
- **q** = numero di facce incidenti su ogni vertice o numero di spigoli (lati) che si incontrano in ogni vertice
- **V** : numero dei vertici
- **S** : numero degli spigoli (dei lati)
- **F** : numero delle facce

-ogni spigolo condivide 2 facce: $F= 2S/p \longrightarrow pF = 2S$

-ogni spigolo congiunge 2 vertici: $V = 2S/q \longrightarrow qV = 2S$

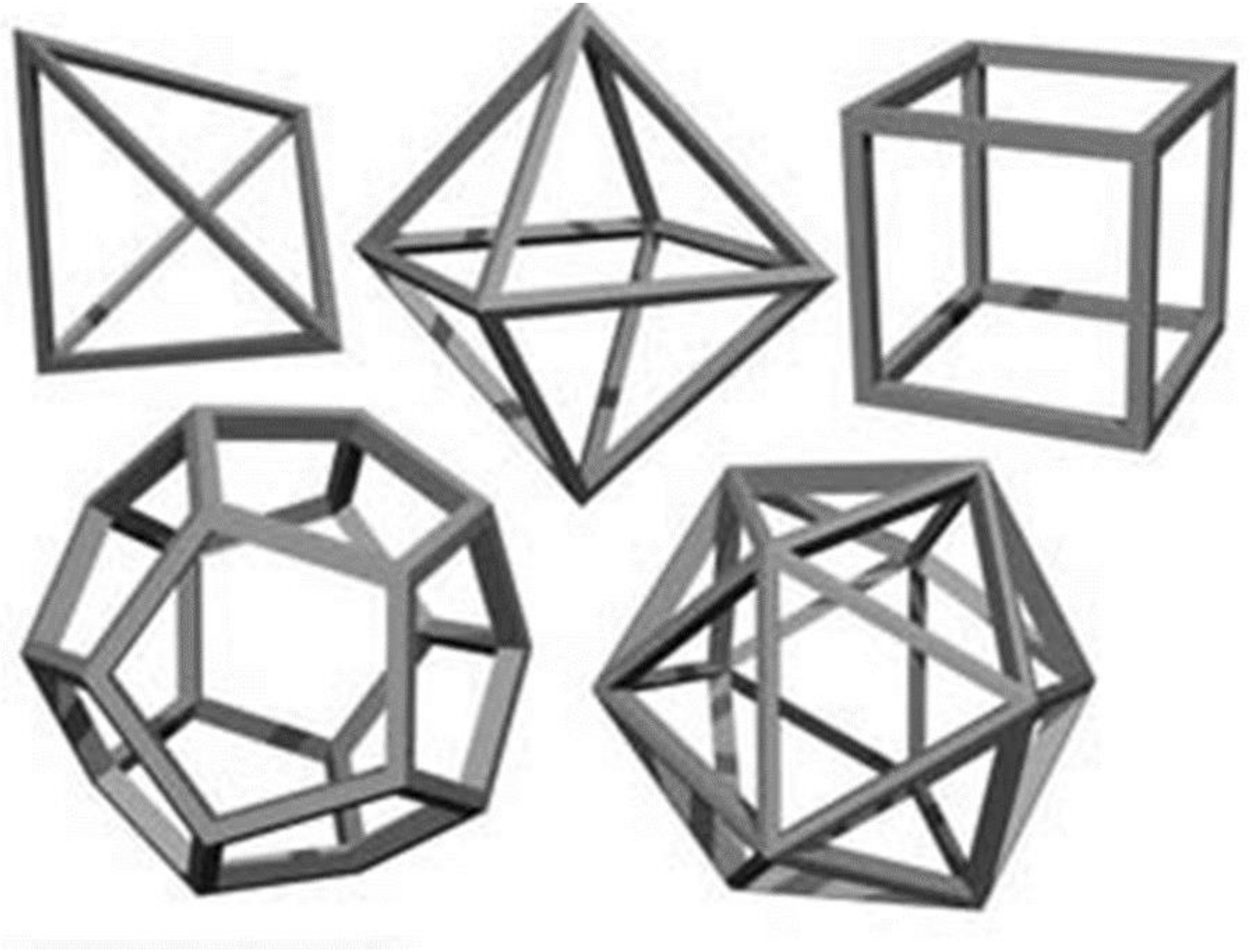
# $pF = qV = 2S$ (valida per i solidi regolari)
# $F + V - S = 2$ (valida per tutti i topologicamente equivalenti a reti piane)

- p=3
  - q=3 ........................................... tetraedro (4 facce)
  - q=4 ........................................... ottaaedro (8 facce)
  - q=5 ........................................... icosaedro (20 facce)
- p=4
  - q=3 ........................................... esaedro (6 facce); cubo
- p=5
  - q=3 ........................................... dodecaedro (12 facce)

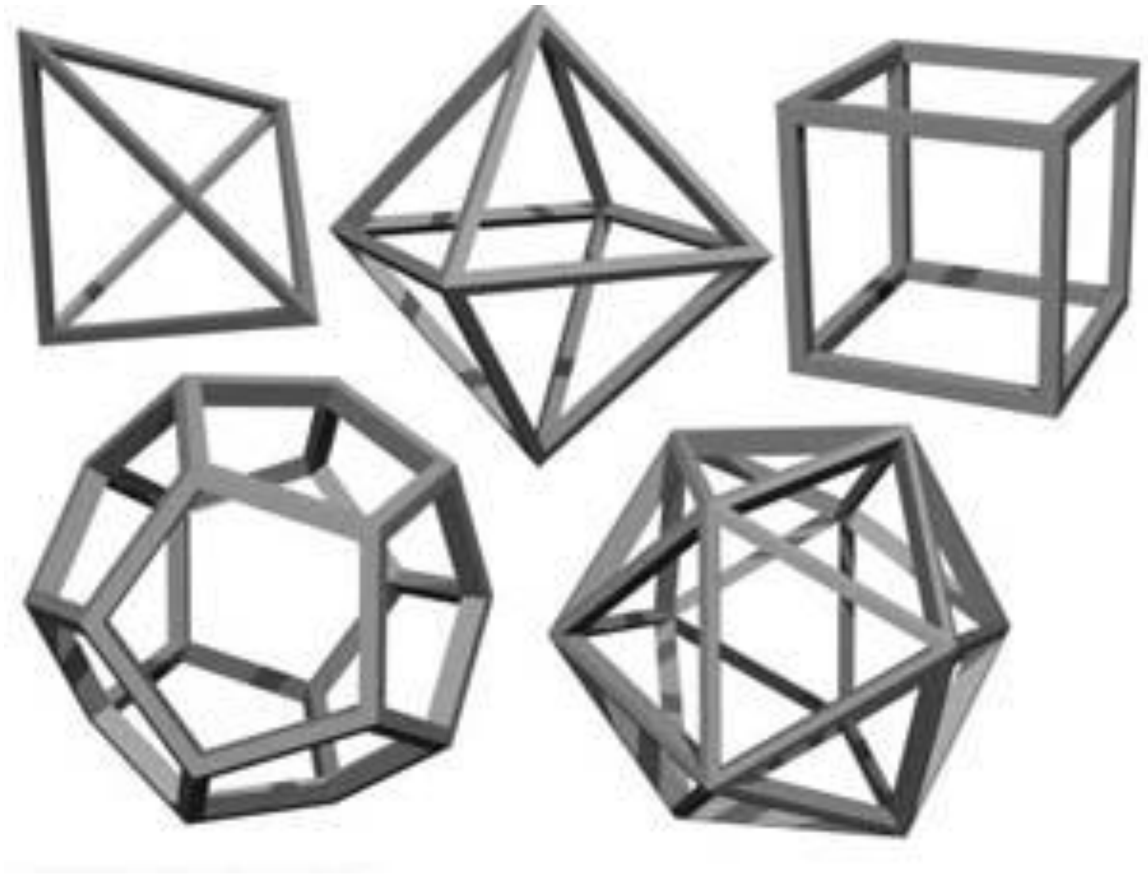
pF= qV=2S
(valida per i solidi regolari)

F + V – S =2
(valida per tutti i topologicamente equivalenti a reti piane)

- {3,3} Tetraedro (3 spigoli per faccia, 3 spigoli da ogni vertice)
- {4,3} Cubo (4 spigoli per faccia, 3 spigoli da ogni vertice)
- {3,4} Ottaedro (3 spigoli per faccia, 4 spigoli in da ogni vertice)
- {5,3} Dodecaedro (5 spigoli per faccia, 3 spigoli da ogni vertice)
- {3,5} Icosaedro (3 spigoli per faccia, 5 spigoli da ogni vertice)

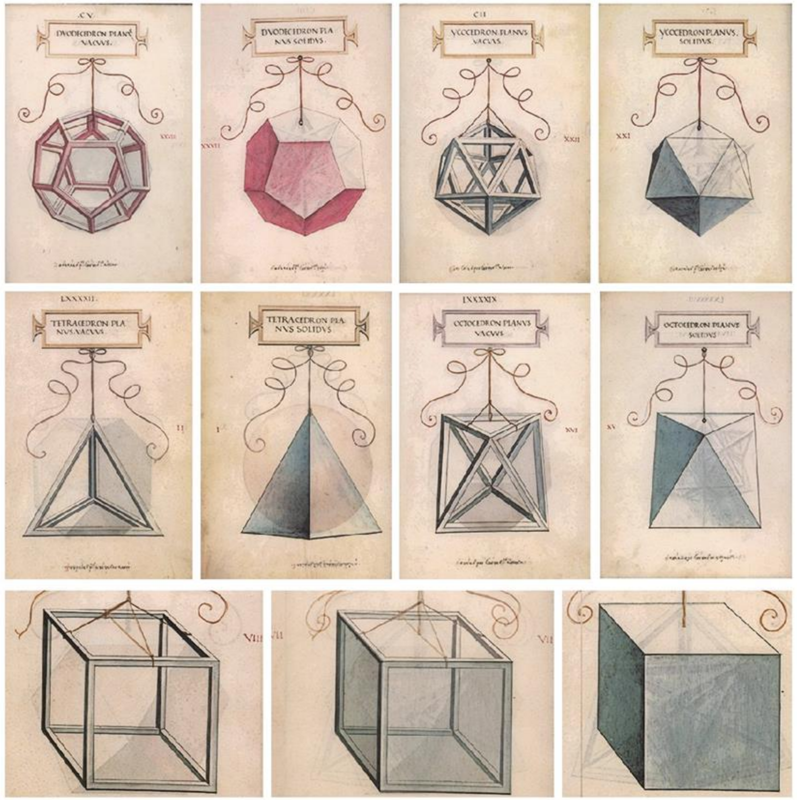


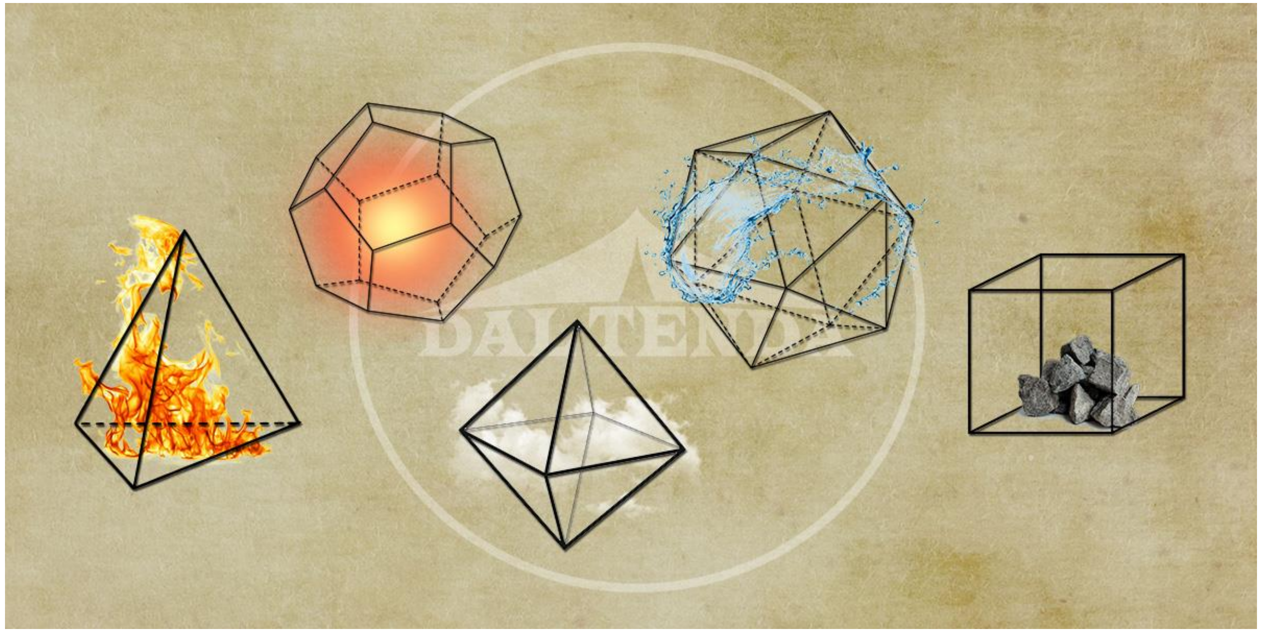
# Spigoli, Facce, Vertici: contiamoli



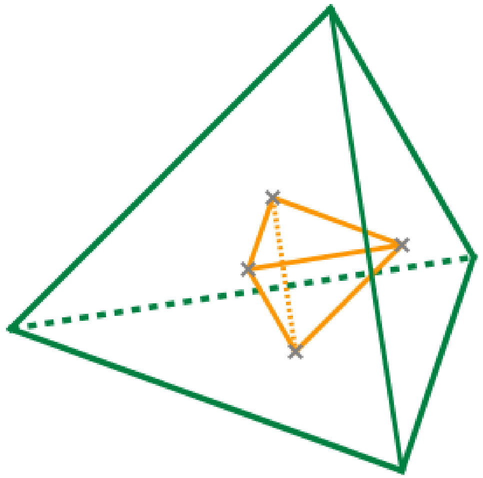
| | *facce* | *spigoli* | *vertici* |
|---|---|---|---|
|  *tetraedro* | 4 triangoli equilateri | 6 | 4 |
|  *esaedro (cubo)* | 6 quadrati | 12 | 8 |
|  *ottaedro* | 8 triangoli equilateri | 12 | 6 |
|  *dodecaedro* | 12 pentagoni regolari | 30 | 20 |
|  *icosaedro* | 20 triangoli equilateri | 30 | 12 |

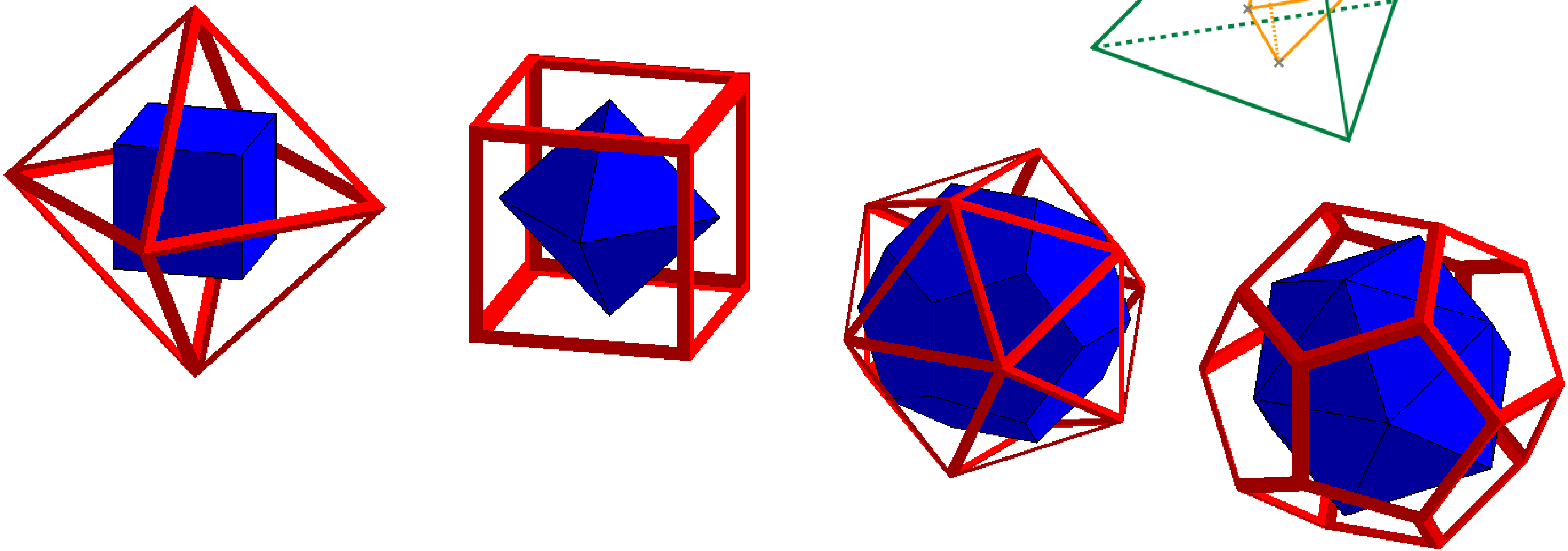
# Solidi platonici: adottiamone uno.



**Poliedro duale Q:** ottenuto da un poliedro **P** scambiando il ruolo dei **vertici** e delle **facce**





# Lavoro di gruppo: si inizia adesso, si completa a casa per martedì prossimo

Ogni gruppo deve presentare il solido adottato alla classe.

-modello

- Sviluppo piano
- Proprietà
- Sezioni piane
- Assi di simmetria
- Piani di simmetria
- Centro di simmetria
- duale

# Incontro n. 4
# I poliedri

Liceo Matematico

Classe 4 Q

a.s. 2019/20

# Lavori di gruppo

Ogni gruppo deve presentare il solido adottato alla classe.

-modello

- Sviluppo piano e diagrmma di Schleghel
- Proprietà
- Assi di simmetria e simmetrie rotazionali
- Piani di simmetria e Sezioni piane
- Centro di simmetria e raggi

# Gruppi di lavoro

TAVOLO 1
Icosaedro

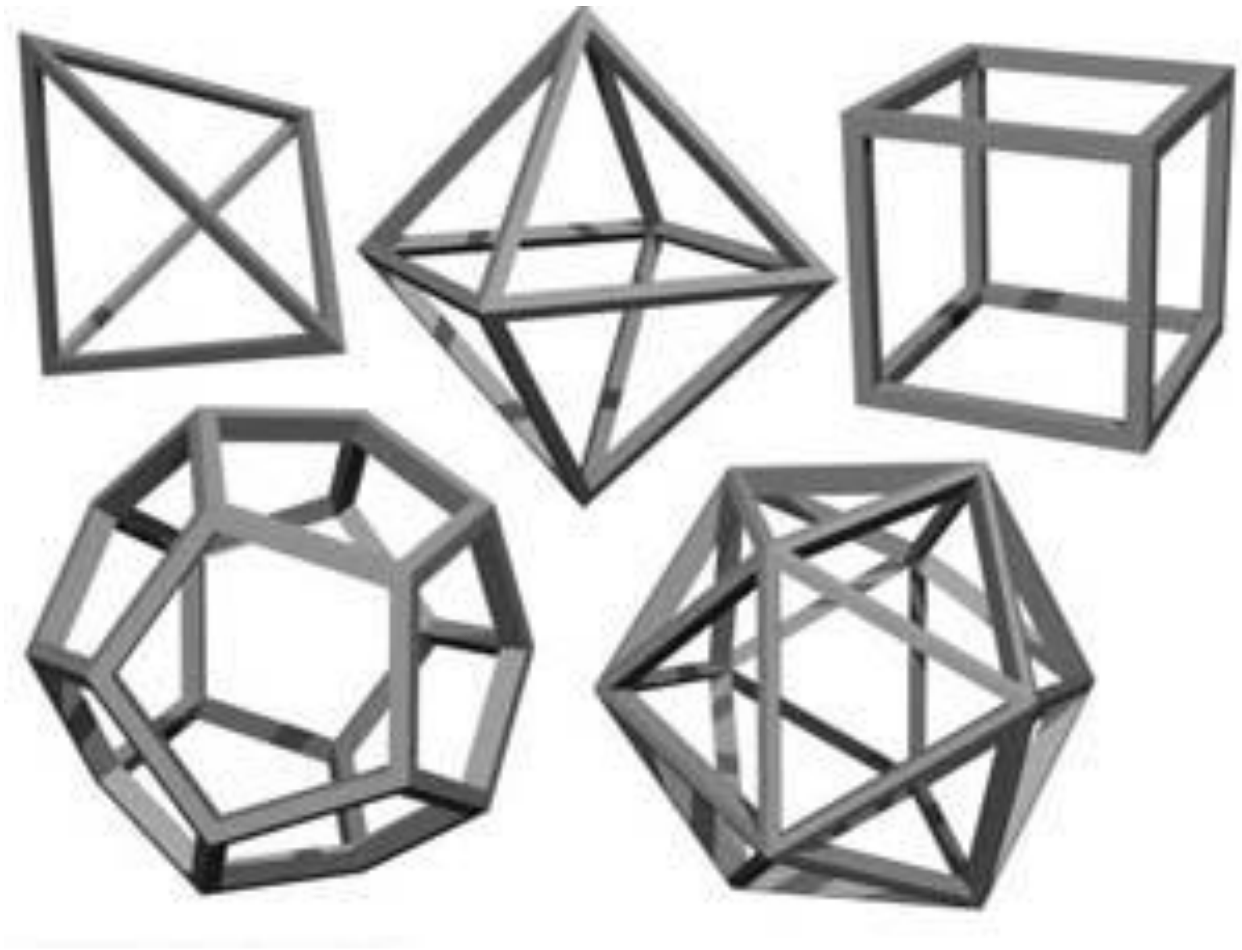
TAVOLO 2
Tetraedro

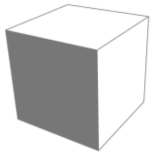
TAVOLO 3
Ottaedro

TAVOLO 4
Dodecaedro

TAVOLO 5
Esaedro

# Spigoli, Facce, Vertici: contiamoli



| | *facce* | *spigoli* | *vertici* |
|---|---|---|---|
|  *tetraedro* | 4 triangoli equilateri | 6 | 4 |
|  *esaedro (cubo)* | 6 quadrati | 12 | 8 |
|  *ottaedro* | 8 triangoli equilateri | 12 | 6 |
|  *dodecaedro* | 12 pentagoni regolari | 30 | 20 |
|  *icosaedro* | 20 triangoli equilateri | 30 | 12 |