Testa o Croce? Un gioco quantomeccanico

Luca Sbano

Licei *Vittoria Colonna*
via Arco del Monte n.99
00186, Roma

luca.sbano@istruzione.it

1 Introduzione

- Questa attività vuole mettere in luce l'importanza di riflettere sulle assunzioni che si fanno quando si rappresenta lo spazio dei possibili stati di un sistema che si comporta in modo casuale.

Immaginiamo che vi siano una ragazza ed un ragazzo che giocano con due monete.

2 Gioco con due monete *classiche*

Supponiamo di avere due monete e di voler giocare a *Testa o Croce* lanciandole entrambe. Tino e Pina, si pongono il seguente problema:

Con quale probabilità, lanciado le due monete si otterrà almeno una testa?

Per poter rispondere alla domanda è necessario dare una definizione di probabilità. Una possibile scelta è affermare che la probabilità di un evento E sia data da:

$$p(E) = \frac{\text{il numero dei casi favorevoli}}{\text{il numero dei casi possibili}} \tag{1}$$

Vediamo cosa possono fare Tino e Pina:

moneta 1/moneta 2	T	C
T	(T,T)	(T,C)
C	(C,T)	(C,C)

Table 1: Possibili stati del lancio di due monete *classiche*

- La tebella è costruita considerando che la moneta 1 potrà uscire con testa (T) e con croce (C) e così anche per la moneta 2 e costituisce una comoda rappresentazione dell'insieme universo:

$$U = \{(T,T), (T,C), (C,T), (C,C)\}.$$

- Tino e Pina contano tutti i casi possibili e trovano che il numero dei casi possibili è 4,
- L'evento favorevole $E = \{\text{Lanciando le due monete esce almeno una testa}\}$, ed il numero dei casi favorevoli è 3.

A questo punto la pobrabilità sarà:

$$p(E) = \frac{\text{il numero dei casi favorevoli}}{\text{il numero dei casi possibili}} = \frac{3}{4} \tag{2}$$

3 Gioco con due monete quantistiche (*bosoniche*)

Arriva Rino, un amico di Tino e Pina, che ha il pallino della fisica. Rino osserva il gioco e pone la seguente domanda: "Ragazzi ma siete sicuri di aver contato bene?". Rino argomenta: "Avete detto che le due monete sono identiche ed, in effetti, così appaiono. Quindi che differenza esiste fra l'evento (T,C) e l'evento (C,T)? Se le due monete sono *uguali* come faccio a distinguere quale moneta esce testa e quale croce?" L'osservazione di Rino mette in luce una ipotesi che non è stata esplicitata quando si è costruita la tabella delle possibili uscite della coppia di monete, infatti Tino e Pina hanno assunto che:

Assunzione 3.1. *Le due monete sono perfettamente distinguibili e quindi possiamo sempre distinguere le uscite (T,C) e (C,T).*

A questa assunzione Rino propone di sostituire:

Assunzione 3.2. *Le due monete sono perfettamente indistinguibili e quindi le uscite (T,C) e (C,T) sono in effetti la stesso evento.*

moneta 1/moneta 2	T	C
T	(T,T)	(T,C)
C	(C,T)	(C,C)

Table 2: Possibili stati del lancio di due monete *bosoniche*

Allora il nuovo insieme universo, proposto da Rino sarà

$$U_{Bosonico} = \{(T,T), (T,C), (C,C)\}.$$

Tino e Pina pensano che sia la solita trovata stramba del loro amico, ma Rino incalza e propone di usare l'aggettivo *bosonico* perchè, ricorda ai due suoi amici, che in Natura esistono particelle che fra di loro sono assolutamente indistinguibili: per esempio i fotoni! Tutte fanno parte di una famiglia di particelle detta *bosonica* in onore del fisico indiano Satyendra Nath Bose che ne ha capito la indistinguibilità. Queste particelle hanno una proprietà detta *spin* che può prendere valori interi e che si comporta esattamente come "Testa e Croce", perciò possiamo immaginare di giocare con monete bosoniche! È importante ricordare che lo spin è una grandezza fisica che è stata scoperta studiando le proprietà quantistiche della materia.

Rino propone allora di considerare l'evento E per le monete *bosoniche*. Un semplice calcolo mostra che:

- Il numero dei casi possibili $= 3$
- I casi favorevoli all'evento $E = \{\text{Lanciando le due monete esce almeno una testa}\}$ e trovano:

$$\text{il numero dei casi favorevoli} = 2.$$

A questo punto la pobrabilità con le monete *bosoniche* sarà:

$$p_B(E) = \frac{\text{il numero dei casi favorevoli}}{\text{il numero dei casi possibili}} = \frac{2}{3} \tag{3}$$

Rino osserva: "Con le monete *bosoniche* è meno probabile che l'evento E si realizzi!" Infatti:

$$p_B(E) = \frac{2}{3} < \frac{3}{4} = p(E).$$

Osservazione 3.1. *È importante osservare che la probabilità $p(E)$ è stata calcolata immaginando che le monete siano completamente distinguibili e ciò si fonda sui principi della fisica classica; $p(E)$ può quindi essere chiamata* probabilità classica *dell'evento E.*

4 Gioco con due monete quantistiche (*fermioniche*)

Pina chiede: "Rino, immagino che sapresti proporre monete ancor più strane".

"In effetti, si" replica Rino "Ci sarebbero le monete che potremmo chiamare *fermioniche*, in onore di Enrico Fermi che ha studiato le proprietà statistiche degli elettroni. Le monete *fermioniche* avrebbero quindi uno spin che può prendere solo due valori proprio come T e C per una moneta, ma se si mettono insieme due elettroni essi non potranno avere mai lo stesso spin (Principio di Pauli). Vale la pena ricordare che lo spin di un elettrone può assumere solo i due valori $\pm\hbar/2$. Gli elettroni sono anch'essi indistinguibili e quindi per due monete *fermioniche* varrà la seguente

Assunzione 4.1. *Due monete* fermioniche *sono perfettamente indistinguibili e quindi le uscite (T,C) e (C,T) sono stesso evento inoltre non possono mai uscire nello stato: gli eventi (T,T) e (C,C) sono impossibili.*

moneta 1/moneta 2	T	C
T	Impossibile	(T,C)
C	(C,T)	Impossible

Table 3: Possibili stati del lancio di due monete *fermioniche*

Il nuovo insieme universo sarà

$$U_{Fermionico} = \{(T,C)\}.$$

Ora se si potessero lanciare due monete *fermioniche* l'evento E risulterebbe sempre banalmente verificato ovvero la probabilità con le monete *fermioniche* è:

$$p_F(E) = 1.$$

Conclusioni

- L'analisi di un semplice gioco di monete permette di riflettere sulle proprietà dello spazio dei possibili eventi U.
- Le possibili interpretazioni e le possibili assunzioni che si possono fare su U possono essere utilizzate per introdurre in modo naturale esempi che replicano sistemi quanto meccanici fondamentali nella fisica teorica moderna.

Bibliografia

1. G.J. Szekely *Paradoxes in probability and mathematical statistics* Akadémai Kaidò, Budapest 1986